

DEL 1 – Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng)

Formel (prosent av en helhet): andel $\cdot$ totalt antall = antall som svarer til andelen

88 % av elevene deltar i undersøkelsen, altså deltar $100 \% - 88 \% = 12 \%$ ikke. Disse 12 % tilsvarer de 3 elevene som ikke deltar. Lar x være antall elever i klassen:

$$0,12 \cdot x = 3$$

$$x = \frac{3}{0,12} = \underline{25}$$

Det er 25 elever i klassen.

Oppgave 2 (4 poeng)

Sorterer antall personer i vognene i stigende rekkefølge:

2, 2, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 8

a) Det er 10 observasjoner, så medianen er gjennomsnittet av verdi nummer 5 og 6 i den sorterte rekka:

$$\text{median} = \frac{4 + 6}{2} = \underline{5}$$

Formel (gjennomsnitt): $\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{sum av verdiene}}{\text{antall verdier}}$

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 6 + 6 + 7 + 8 + 8}{10} = \frac{50}{10} = \underline{5}$$

Medianen er 5 personer, og gjennomsnittet er også 5 personer per vogn.

b) Kumulativ frekvens for 6 personer er antall vogner med 6 personer eller færre. Av de sorterte verdiene 2, 2, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 8 er det 7 vogner med 6 personer eller færre (de seks første og den sjuende, som også er 6):

Den kumulative frekvensen for 6 personer er 7.

Praktisk tolkning: dette betyr at 7 av de 10 vognene Trine og Truls talte i, hadde 6 personer eller færre om bord, mens de resterende 3 vognene hadde flere enn 6 personer.

Oppgave 3 (2 poeng)

Lar x være vekten (i kg) til en liten sekk. En stor sekk veier da $x + 7$ kg, siden store sekker veier 7 kg mer enn små.

Likning I (totalvekt): $4x + 2(x + 7) = 44$

Løser likningen ved å gange ut parentesene og samle ledd:

$$4x + 2x + 14 = 44$$

$$6x = 30$$

$$x = \underline{5}$$

En stor sekk veier da $5 + 7 = \underline{12}$ kg.

En liten sekk veier 5 kg, og en stor sekk veier 12 kg.

Oppgave 4 (3 poeng)

Halvsirkelen har radius $r = 1,0$ m.

Formel (areal av sirkel/halvsirkel): $A_{\text{halvsirkel}} = \frac{1}{2}\pi r^2$

$$A_{\text{halvsirkel}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 1,0^2 \approx \underline{1,57} \text{ m}^2$$

Formel (omkrets av halvsirkel): $O_{\text{halvsirkel}} = \pi r + 2r$ (buelengden pluss diameteren/tverrsnittet)

$$O_{\text{halvsirkel}} = \pi \cdot 1,0 + 2 \cdot 1,0 \approx \underline{5,14} \text{ m}$$

Trekanten ABC er likebeint med grunnlinje $AB = 3,0$ m og høyde $h = 1,0$ m ned på AB.

Formel (areal av trekant): $A_{\text{trekant}} = \frac{1}{2} \cdot \text{grunnlinje} \cdot \text{høyde}$

$$A_{\text{trekant}} = \frac{1}{2} \cdot 3,0 \cdot 1,0 = \underline{1,50} \text{ m}^2$$

For omkretsen trengs de to like lange sidene AC og BC. Siden trekanten er likebeint og høyden treffer midt på AB, deler høyden AB i to like deler på 1,5 m hver. Sidene AC og BC er da hypotenusen i en rettvinklet trekant med kateter 1,5 m og 1,0 m:

Formel (Pytagoras): side = $\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + h^2}$

$$\text{side} = \sqrt{1,5^2 + 1,0^2} = \sqrt{3,25} \approx \underline{1,80} \text{ m}$$

$$O_{\text{trekant}} = AB + 2 \cdot \text{side} = 3,0 + 2 \cdot 1,80 \approx \underline{6,61} \text{ m}$$

Halvsirkelen har størst areal (ca. 1,57 m² mot trekantens 1,50 m²), mens trekanten har størst omkrets (ca. 6,61 m mot halv

Oppgave 5 (2 poeng)

a) Nedbetalingsplanen viser avdraget («Avdrag») og rentedelen («Renter») av terminbeløpet for hver av de 10 terminene. Lånebeløpet er summen av alle avdragene gjennom nedbetalingstiden, siden avdrag er selve nedbetalingen av lånet (rentedelen er en kostnad, ikke nedbetaling av gjelda).

Formel (lånebeløp = sum av avdrag): lånebeløp = antall terminer · avdrag per termin

Figuren viser at avdraget er 10 000 kr i hver av de 10 terminene:

$$\text{lånebeløp} = 10 \cdot 10\,000 = \underline{100\,000} \text{ kr}$$

Marco har tatt opp et lån på 100 000 kr.

b) Skillet mellom annuitetslån og serielån avgjøres av hvordan *terminbeløpet* (det totale beløpet betalt per år) endrer seg over nedbetalingstiden:

- Ved et **serielån** er avdraget likt hvert år, men rentedelen minker etter hvert som restgjelden minker. Terminbeløpet blir derfor gradvis mindre år for år.
- Ved et **annuitetslån** er det totale terminbeløpet likt hvert år gjennom hele nedbetalingstiden, mens fordelingen mellom rente og avdrag endrer seg internt.

Figuren viser at avdraget er konstant 10 000 kr i alle 10 terminene, mens rentedelen avtar fra ca. 4000 kr i termin 1 til ca. 400 kr i termin 10. Terminbeløpet (stolpehøyden) synker derfor jevnt fra 14 000 kr til ca. 10 400 kr, så det er ikke konstant.

Dette er et serielån, fordi avdraget er likt (10 000 kr) i hver termin mens det totale terminbeløpet avtar år for år etter hvert som rentedelen minker.

Oppgave 6 (4 poeng)

Tabellen viser aldersfordelingen til 100 medlemmer, gruppert i fire intervaller.

Intervall	Frekvens	Midtpunkt
[16, 20)	20	18
[20, 40)	40	30
[40, 60)	30	50

Intervall	Frekvens	Midtpunkt
[60, 90)	10	75

Formel (gjennomsnitt for gruppert datasett): $\text{gjennomsnitt} \approx \frac{\sum(\text{frekvens} \cdot \text{midtpunkt})}{\text{totalt antall}}$

Antakelse: personene er jevnt fordelt innad i hvert intervall, slik at intervallets midtpunkt er representativt for gjennomsnittsalderen i intervallet.

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{20 \cdot 18 + 40 \cdot 30 + 30 \cdot 50 + 10 \cdot 75}{100} = \frac{360 + 1200 + 1500 + 750}{100} = \frac{3810}{100} = 38,1 \text{ år}$$

Formel (median for gruppert datasett): $\text{median} = G + \frac{\frac{n}{2} - F}{f} \cdot b$, der G er nedre grense i medianklassen, F er kumulativ frekvens før medianklassen, f er frekvensen i medianklassen, og b er klassebredden.

Kumulativ frekvens: 20, 60, 90, 100. Siden $n/2 = 50$ ligger mellom 20 og 60, er medianklassen $[20, 40)$, med nedre grense $G = 20$, $F = 20$ (kumulativ frekvens før klassen), $f = 40$ og klassebredde $b = 20$:

$$\text{median} = 20 + \frac{50 - 20}{40} \cdot 20 = 20 + 15 = 35 \text{ år}$$

Beregningene gir en gjennomsnittsalder på ca. 38 år og en medianalder på 35 år, som stemmer med Trines påstander. Dette forutsetter antakelsen over om jevn fordeling innad i intervallene.

Oppgave 7 (2 poeng)

Programmet starter med $\text{matsvinn} = 160$ (dagens matsvinn i kg per år) og setter $\text{mål} = \text{matsvinn} / 2 = 80$ (halvparten av dagens matsvinn). Vekstfaktoren $\text{vf} = 0.87$ angir en årlig reduksjon på 13 %. Løkken `while matsvinn > mål` gjentar seg, og teller opp `år` med ett for hver gjentakelse, helt til matsvinnet har blitt redusert til 80 kg eller mindre. Til slutt skriver programmet ut hvilket år dette skjer (`år`) og den faktiske matsvinn-verdien på det tidspunktet (`matsvinn`).

Sofie ønsker altså å finne ut *hvilket år* det årlige matsvinnet for en familie på fire vil være redusert til halvparten av dagens nivå (fra 160 kg til 80 kg), dersom matsvinnet reduseres med 13 % hvert år framover fra 2025.

Verdiene som skrives ut, 2030 og 79,74734731199999, forteller at matsvinnet først kommer under halvparten av dagens nivå i år 2030 (5 år etter 2025), og at matsvinnet det året er redusert til ca. 79,75 kg, altså like under målet på 80 kg.

Sofie vil finne ut hvilket år matsvinnet er redusert til under halvparten av dagens 160 kg, gitt en årlig reduksjon på 13 %. Programmet viser at dette skjer i 2030, når matsvinnet er redusert til ca. 79,75 kg.

DEL 2 – Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Formel (modell gitt i oppgaven): $U(x) = 5000 \cdot 0,95^x + 1000$, der x er antall år fra i dag og $U(x)$ er utslippet i tonn/år.

a) Leddet $5000 \cdot 0,95^x$ er utslippet fra den første produksjonsprosessen, som ifølge planen reduseres med en vekstfaktor på 0,95 per år, altså en årlig reduksjon på 5 %. Leddet 1000 er utslippet fra den andre produksjonsprosessen, som ikke inngår i reduksjonsplanen og derfor holdes konstant på 1000 tonn/år i modellen.

Modellen viser en plan der utslippet fra den ene prosessen (5000 tonn i dag) reduseres med 5 % per år, mens utslippet fra den andre prosessen (1000 tonn) ikke reduseres, men holdes konstant.

b) Dagens utslipp er $U(0) = 5000 \cdot 0,95^0 + 1000 = 6000$ tonn/år. Utslippet er halvert når $U(x) = 3000$:

$$5000 \cdot 0,95^x + 1000 = 3000$$

$$5000 \cdot 0,95^x = 2000$$

$$0,95^x = 0,4$$

Løser med logaritme på begge sider:

$$x = \frac{\lg(0,4)}{\lg(0,95)} \approx \underline{17,9}$$

Ifølge modellen tar det ca. 17,9 år før utslippet er halvert.

c)

$$U(10) = 5000 \cdot 0,95^{10} + 1000 \approx \underline{3993,7} \text{ tonn/år}$$

Formel (prosentvis endring): prosentvis endring = $\frac{\text{endring}}{\text{utgangsverdi}} \cdot 100 \%$

Endringen er differansen mellom dagens utslipp og utslippet etter 10 år, utgangsverdien er dagens utslipp $U(0) = 6000$:

$$\frac{U(0) - U(10)}{U(0)} \cdot 100 \% = \frac{6000 - 3993,7}{6000} \cdot 100 \% \approx \underline{33,4 \%}$$

Etter 10 år er utslippet redusert med ca. 33,4 %.

d) Når $x \rightarrow \infty$ går $0,95^x \rightarrow 0$, slik at $U(x)$ nærmer seg (men aldri kommer under) grenseverdien 1000 tonn/år, som er utslippet fra den andre prosessen som ikke reduseres. Siden $800 < 1000$, kan modellen aldri gi et utslipp på 800 tonn/år, uansett hvor mange år som går.

Nei, ifølge modellen er det ikke mulig å nå 800 tonn/år, fordi utslippet aldri kommer under 1000 tonn/år (utslippet fra den andre prosessen, som ikke er del av reduksjonsplanen).

Oppgave 2 (3 poeng)

Sorterer de 10 alderne: 5, 5, 12, 14, 28, 30, 40, 42, 67, 70. Medianen er gjennomsnittet av verdi 5 og 6: $\frac{28+30}{2} = 29$ år.

a) Kommer det inn en 11. person, blir medianen den midterste verdien (verdi nummer 6) i den nye, sorterte rekka med 11 verdier. Om medianen faktisk endrer seg, avhenger av hvilken alder den nye personen har. For eksempel: kommer det inn en person på 29 år, blir den sorterte rekka 5, 5, 12, 14, 28, **29**, 30, 40, 42, 67, 70, og medianen (verdi nummer 6) er fortsatt 29, altså uendret.

Påstand 1 stemmer ikke nødvendigvis: kommer det for eksempel inn en 29 år gammel person, forblir medianen 29 år, uendret fra før.

b)

Formel (gjennomsnitt): $\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{sum av verdiene}}{\text{antall verdier}}$

Summen av de 10 alderne er $12 + 14 + 40 + 42 + 70 + 67 + 5 + 5 + 28 + 30 = 313$, som gir et gjennomsnitt i dag på $\frac{313}{10} = 31,3$ år. Lar y være alderen til den nye personen som kommer inn, slik at det er 11 personer totalt:

$$\frac{313 + y}{11} = 30$$

$$313 + y = 330$$

$$y = \underline{17}$$

Siden 17 år er en fullt mulig alder for et menneske, kan gjennomsnittsalderen faktisk bli 30 år.

Påstand 2 stemmer: kommer det inn en person på 17 år, blir den nye gjennomsnittsalderen nøyaktig 30 år.

Oppgave 3 (2 poeng)

Skissen viser to parallelle, horisontale linjer (elvbreddene). På den motsatte bredden ligger C (venstre) og B (høyre), med $BC = 40$ m. På den nærmeste bredden ligger E og D, med D rett under B. Rett vinkel er markert både ved B og ved D, så strekningen BD står vinkelrett på begge breddene (BD er selve elvbredden). A ligger videre nedover på samme rette linje som B og D, med $AD = 5$ m. Siktelinjen fra C går rett gjennom E og videre til A, med $DE = 10$ m.

a) Siden $BD \perp BC$ (rett vinkel ved B) og $BD \perp DE$ (rett vinkel ved D), er BC parallell med DE, siden begge står vinkelrett på den samme linja BDA. Når BC er parallell med DE, er vinkel ABC lik vinkel ADE (begge er rette vinkler), og siden A, D, B ligger på samme rette linje og A, E, C ligger på samme rette linje (siktelinjen), er vinkel A felles for de to trekantene ABC og ADE. To par like vinkler gir formlikhet etter AA-kriteriet:

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ fordi de har to par like vinkler (vinkel A felles, og vinkel $ABC = \text{vinkel } ADE = 90^\circ$, siden $BC \parallel DE$).

b) Kari vil finne avstanden BD (elvebredden). Siden $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, er forholdet mellom tilsvarende sider likt:

Formel (formlike trekanter, forhold mellom tilsvarende sider): $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

AD = 5 m, DE = 10 m og BC = 40 m er alle oppgitt. Løser først for AB:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \implies AB = \frac{AD \cdot BC}{DE} = \frac{5 \cdot 40}{10} = 20 \text{ m}$$

Avstanden BD er differansen mellom AB og AD, siden A, D og B ligger på samme rette linje med D mellom A og B:

$$BD = AB - AD = 20 - 5 = 15 \text{ m}$$

Avstanden fra B til D (elvebredden) er 15 m.

Oppgave 4 (5 poeng)

Formel (modell gitt i oppgaven): $F(x) = 12000 \cdot 0,87^x$, der x er antall år fram i tid og $F(x)$ er antall fugler i bestanden.

a) I dag ($x = 0$) gir modellen $F(0) = 12000 \cdot 0,87^0 = 12000$, som stemmer med at bestanden i dag er 12 000 fugler. Forskerne mener bestanden fortsetter å halveres hvert 5. år, så en god modell bør gi at bestanden var dobbelt så stor for 5 år siden ($x = -5$) som i dag:

$$F(-5) = 12000 \cdot 0,87^{-5} \approx 24076$$

Dette stemmer godt med at bestanden var halvert i løpet av de siste 5 årene (fra ca. 24 000 til 12 000). Vekstfaktoren 0,87 er valgt nettopp fordi $0,87^5 \approx 0,498 \approx 0,5$, altså en halvering hvert 5. år.

$$F(x) = 12000 \cdot$$

$0,87^x$ er en god modell, fordi den både treffer dagens bestand på 12 000 fugler ved $x=0$, og gir en halvering omtrent hvert 5.

b)

$$F(7) = 12000 \cdot 0,87^7 \approx 4527$$

Etter 7 år vil bestanden ifølge modellen bestå av ca. 4527 fugler.

c) En reduksjon på 35 % betyr at bestanden er redusert til $100 \% - 35 \% = 65 \%$ av dagens nivå, altså $F(x) = 0,65 \cdot 12000 = 7800$:

$$12000 \cdot 0,87^x = 7800$$

$$0,87^x = 0,65$$

$$x = \frac{\lg(0,65)}{\lg(0,87)} \approx 3,1$$

Ifølge modellen tar det ca. 3,1 år før bestanden er redusert med 35 %.

Oppgave 5 (6 poeng)

År	2021	2022	2023	2024
KPI	117,2	126,0	131,1	134,5

a) Husleieloven tillater at ny leie settes opp med maksimalt samme prosentvise endring som KPI-endringen i samme periode.

Formel (KPI-justert pris): ny pris = gammel pris $\cdot \frac{\text{ny indeks}}{\text{gammel indeks}}$

Gammel pris er husleien oktober 2023 (8500 kr), gammel indeks er KPI oktober 2023 (131,1), ny indeks er KPI oktober 2024 (134,5):

$$\text{maks lovlig ny leie} = 8500 \cdot \frac{134,5}{131,1} \approx 8720 \text{ kr}$$

Huseier varsler en ny pris på 9000 kr, som er høyere enn den maksimalt lovlig leia på ca. 8720 kr.

Nei, huseiers foreslåtte prisøkning til 9000 kr er ikke lovlig, fordi den maksimalt lovlig leia ut fra KPI-endringen er ca. 8720 kr.

b)

Formel (prosentvis endring): prosentvis endring = $\frac{\text{ny KPI} - \text{gammel KPI}}{\text{gammel KPI}} \cdot 100 \%$

Periode	Utgregning	Prosentvis økning
2021 → 2022	$\frac{126,0-117,2}{117,2} \cdot 100 \%$	<u>7,5 %</u>
2022 → 2023	$\frac{131,1-126,0}{126,0} \cdot 100 \%$	<u>4,0 %</u>
2023 → 2024	$\frac{134,5-131,1}{131,1} \cdot 100 \%$	<u>2,6 %</u>

Den årlige KPI-økningen har avtatt gjennom perioden: ca. 7,5 % (2021–22), 4,0 % (2022–23) og 2,6 % (2023–24).

c) Antakelse: siden det ikke oppgis KPI-tall for 2025 og 2026, antas det at KPI fortsetter å øke med samme prosentvise rate som det siste kjente året (2023→2024, ca. 2,6 % per år), og at huseier hvert år justerer leia opp til akkurat den maksimalt lovlige grensa. Regner videre ut fra dette, med utgangspunkt i den maksimalt lovlige leia fra oktober 2024 (8720,44 kr fra a), her med én desimal ekstra siden verdien brukes videre):

$$\text{leie okt. 2025} = 8720,44 \cdot 1,0259 = 8946,3 \approx \underline{8946} \text{ kr}$$

$$\text{leie okt. 2026} = 8946,3 \cdot 1,0259 = 9178,0 \approx \underline{9178} \text{ kr}$$

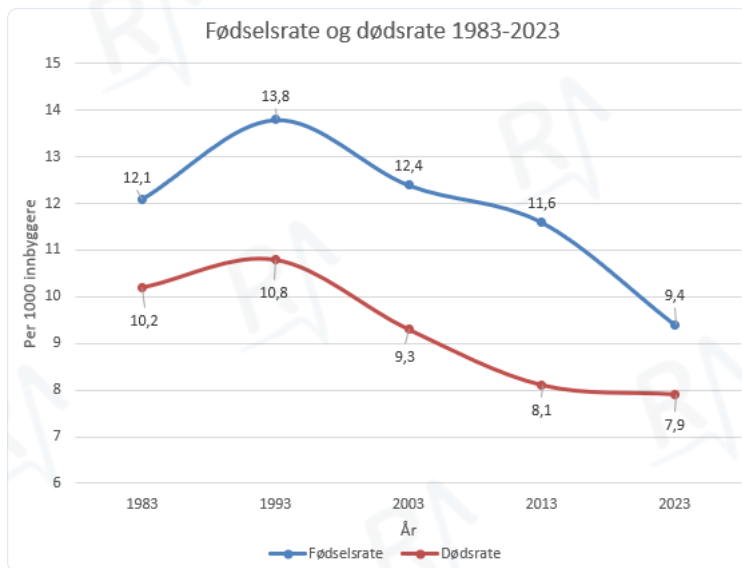
Under antakelsen om at KPI fortsetter å øke med ca. 2,6 % per år, og at huseier justerer leia til maksimalt lovlig nivå hvert år, må Felix betale ca. 9178 kr per måned fra oktober 2026.

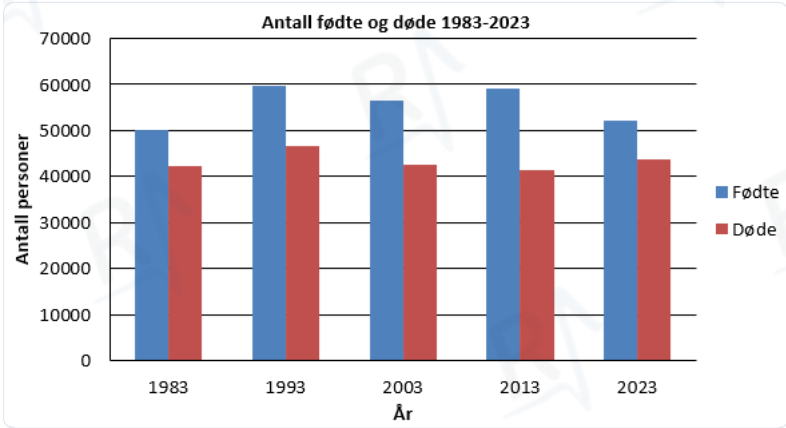
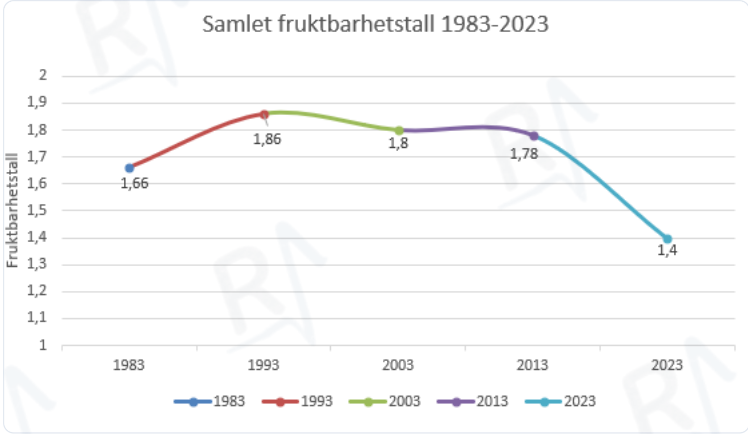
Oppgave 6 (4 poeng)

År	Fødte	Døde	Fødselsrate	Dødsrate	Fruktbarhetstall
1983	49 937	42 224	12,1	10,2	1,66
1993	59 678	46 597	13,8	10,8	1,86
2003	56 458	42 478	12,4	9,3	1,80
2013	58 995	41 282	11,6	8,1	1,78
2023	51 980	43 803	9,4	7,9	1,40

År	Fødte	Døde	Fødselsrate	Dødsrate	Fruktbarhetstall	Fruktbarhetsendring	
1983	49937	42224	12,1	10,2	1,66		
1993	59678	46597	13,8	10,8	1,86	0,12	=(F3-F2)/F2
2003	56458	42478	12,4	9,3	1,8	-0,03226	=(F4-F3)/F3
2013	58995	41282	11,6	8,1	1,78	-0,0111	=(F5-F4)/F4
2023	51980	43803	9,4	7,9	1,4	-0,21348	=(F6-F5)/F5

Presentasjon: Lager tre diagrammer i regneark/GeoGebra med årstall (1983, 1993, 2003, 2013, 2023) langs x-aksen: ett linjediagram som viser fødselsrate og dødsrate sammen (begge oppgitt i samme enhet, per 1000 innbyggere), ett linjediagram som viser fruktbarhetstallet alene (egen skala, siden det er et gjennomsnittlig antall barn per kvinne og ikke en rate per 1000), og ett stolpediagram som viser antall fødte og døde i faktiske tall — nettopp for å synliggjøre kontrasten mellom antall (som øker noe) og ratene (som faller). Fødselsraten starter høyere enn dødsraten i hele perioden, men de to kurvene nærmer seg hverandre mot slutten av perioden, mens fruktbarhetstallet stiger fram til 1993 og deretter faller jevnt fram til 2023.





Formel (prosentvis endring 1983–2023): prosentvis endring = $\frac{\text{verdi 2023} - \text{verdi 1983}}{\text{verdi 1983}} \cdot 100 \%$

Størrelse	Utgregning	Prosentvis endring 1983–2023
Fødte	$\frac{51980 - 49937}{49937} \cdot 100 \%$	+4,1 %
Døde	$\frac{43803 - 42224}{42224} \cdot 100 \%$	+3,7 %
Fødselsrate	$\frac{9,4 - 12,1}{12,1} \cdot 100 \%$	–22,3 %
Dødsrate	$\frac{7,9 - 10,2}{10,2} \cdot 100 \%$	–22,5 %
Fruktbarhetstall	$\frac{1,40 - 1,66}{1,66} \cdot 100 \%$	–15,7 %

Selv om antall fødte og døde har økt noe fra 1983 til 2023 (fordi folketallet i Norge har vokst), har fødselsraten, dødsraten og fruktbarhetstallet alle falt tydelig: fødselsraten og dødsraten med ca. 22 % og fruktbarhetstallet med ca. 16 %. Dette viser at Norge har fått færre fødsler og dødsfall per innbygger, og at kvinner i gjennomsnitt får færre barn enn i 1983.