

DEL 1 – Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Prisindeksen for brød har utviklet seg slik fra 2015 til 2021:

År	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Prisindeks	100,0	102,5	104,5	107,3	109,2	111,8	113,3

a) **Formel (prosentvis endring):** prosentvis endring = $\frac{\text{ny verdi} - \text{gammel verdi}}{\text{gammel verdi}} \cdot 100\%$

Ny verdi er prisindeksen i 2021 (113,3), gammel verdi er prisindeksen i 2015 (100,0), som er referanseåret:

$$\frac{113,3 - 100,0}{100,0} \cdot 100\% = \underline{13,3\%}$$

Brødsprisen steg med 13,3 % fra 2015 til 2021.

b) Regner ut hvor mye prisindeksen steg mellom 2017 og 2019, med samme formel som i a). Gammel verdi er prisindeksen i 2017 (104,5), ny verdi er prisindeksen i 2019 (109,2):

$$\frac{109,2 - 104,5}{104,5} \cdot 100\% \approx \underline{4,5\%}$$

Regner deretter ut hvor mye det konkrete brødet faktisk steg i pris i samme periode, med gammel verdi 40 kr og ny verdi 42 kr:

$$\frac{42 - 40}{40} \cdot 100\% = \underline{5,0\%}$$

Brødets faktiske prisstigning (5,0 %) er større enn prisindeksens stigning i samme periode (ca. 4,5 %).

Ja, dette brødet steg mer i pris (5,0 %) enn prisindeksen (ca. 4,5 %) fra 2017 til 2019.

Oppgave 2

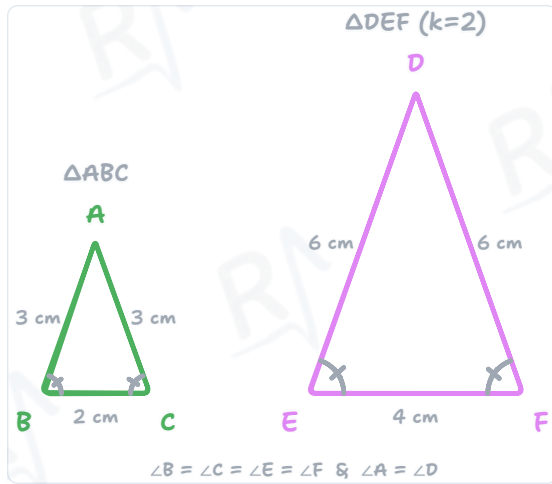
$\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike og likebeinte, og arealet av $\triangle DEF$ er fire ganger arealet av $\triangle ABC$.

Formel (areal og målestokk ved formlike figurer): dersom to formlike figurer har målestokk k mellom tilsvarende lengder, er forholdet mellom arealene k^2 .

Arealforholdet mellom de to trekantene er oppgitt til 4, så målestokken (forholdet mellom tilsvarende sider) er

$$k^2 = 4 \implies k = \underline{2}$$

Skisse: $\triangle ABC$ tegnes som en liten, likebeint trekant med grunnlinje 2 cm og de to like sidene 3 cm hver. $\triangle DEF$ tegnes som en likebeint trekant med akkurat samme fasong (samme vinkler), men med alle sider dobbelt så lange som i $\triangle ABC$: grunnlinje 4 cm og de to like sidene 6 cm hver. De to trekantene ser ut som forstørrelser/forminskninger av hverandre: samme vinkler, dobbel sidelengde i DEF. Vinkelmerkingen viser at $\angle B = \angle C = \angle E = \angle F$ (én bue) og $\angle A = \angle D$ (dobbel bue), som følger av at trekantene er formlike.



Argumentasjon: Siden trekantene er formlike, er alle tilsvarende vinkelpar like, og alle tilsvarende sidepar står i samme forhold k . Når hver sidelengde i den store trekanten dobles i forhold til den lille, dobles også grunnlinjen og høyden i arealformelen $A = \frac{1}{2} \cdot \text{grunnlinje} \cdot \text{høyde}$. Arealet er da produktet av to lengder som begge er doblet, så arealet blir $2 \cdot 2 = 4$ ganger så stort, nøyaktig slik oppgaven oppgir.

Målestokken mellom trekantene er 2 (DEF har dobbelt så lange sider som ABC), fordi arealforholdet 4 er kvadratet av lengdeforholdet.

Oppgave 3

Truls har fått 16 % høyere lønn i kroner over 6 år (nominell lønnsvekst), men det er ikke det samme som at han kan kjøpe 16 % mer for pengene.

Formel (sammenheng mellom nominell lønn, reallønn og KPI): $\text{vekstfaktor}_{\text{reallønn}} = \frac{\text{vekstfaktor}_{\text{nominell lønn}}}{\text{vekstfaktor}_{\text{KPI}}}$

Nominell lønn er lønnen målt i faktiske kroner, uten justering for prisstigning. Truls' nominelle lønnsvekst på 16 % over 6 år tilsvarer vekstfaktoren 1,16.

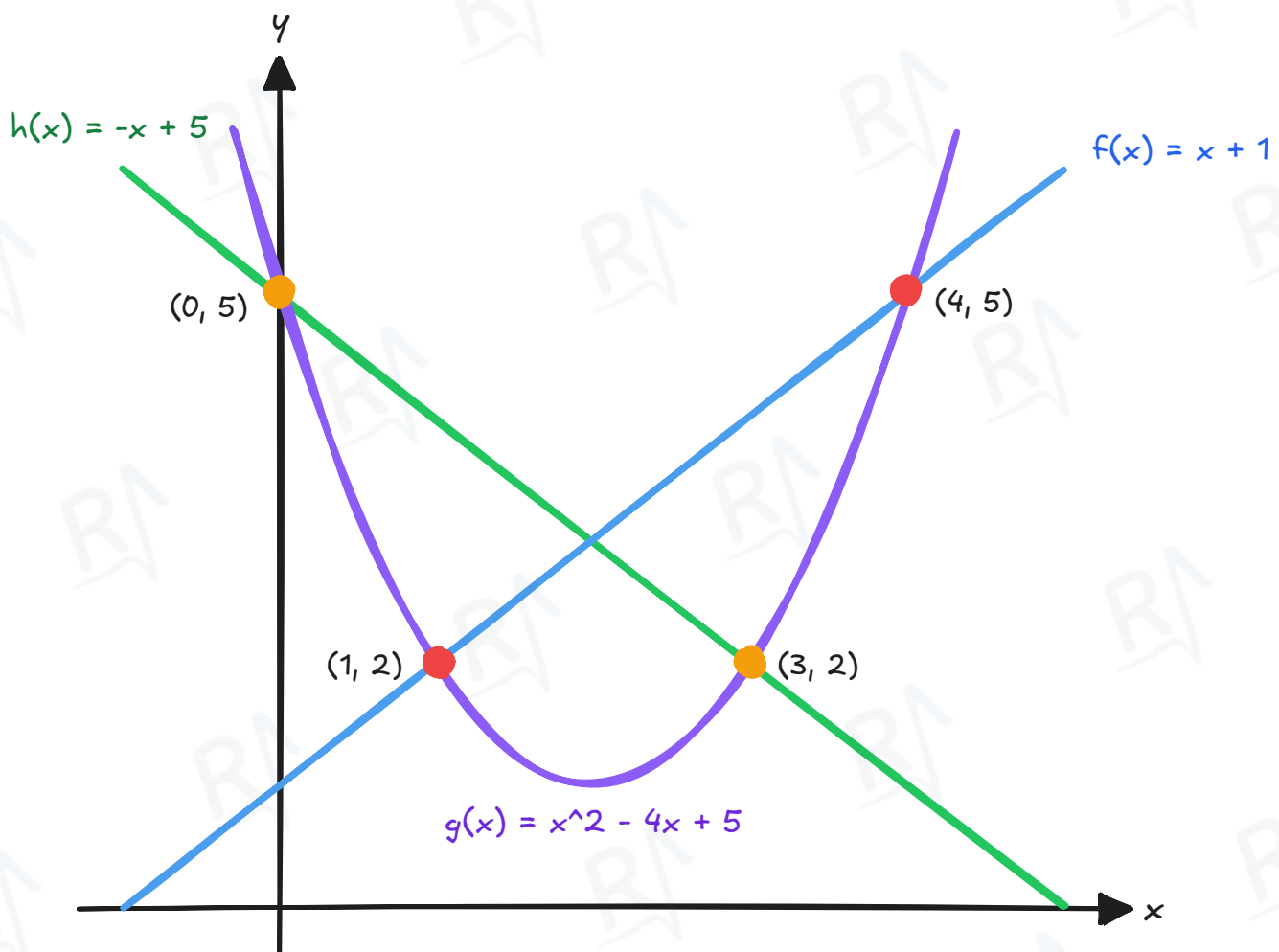
Reallønn er det lønnen faktisk er verdt i kjøpekraft, det vil si nominell lønn justert for hvor mye prisene generelt (KPI) har steget i samme periode. Dersom KPI også har steget med omtrent 16 % i disse 6 årene, er reallønnsveksten omtrent null. Truls kan kjøpe omtrent like mye som før, selv om han har flere kroner. Dersom KPI har steget mer enn 16 %, har reallønnen hans faktisk gått ned, til tross for at lønnen i kroner har økt. Bare dersom KPI har steget mindre enn 16 %, har Truls fått en reell kjøpekraftsforbedring.

Thea må forklare Truls at han må sammenligne lønnsveksten sin (16 %) med prisveksten (KPI) i samme 6-årsperiode: bare den delen av lønnsveksten som overstiger prisveksten, gir ham faktisk mer å rutte med (reallønnsvekst). Uten å vite hvor mye KPI har steget i perioden, kan man ikke avgjøre om Truls faktisk har fått bedre råd.

Oppgave 4

Funksjonene $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 4x + 5$ og $h(x) = -x + 5$ er tegnet i samme koordinatsystem i oppgaven (x-akse fra -1 til 5, y-akse fra 0 til ca. 6,5): f er den stigende rette linja gjennom (0, 1) og (2, 3), h er den fallende rette linja gjennom (0, 5) og (5, 0), og g er parabellen med bunnpunkt i (2, 1) som skjærer y-aksen i 5. Oppgaven ber om at den grafiske framstillingen brukes til å løse likningen/ulikheten, så løsningene leses av grafen; utregningene under er kontroll av avlesningen.

Oppgave 4 - $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2-4x+5$, $h(x)=-x+5$



a) Velger likningen $f(x) = g(x)$, altså den rette linja mot parabelen. Grafisk er løsningene x-verdiene der de to grafene skjærer hverandre. Av figuren leses de to skjæringspunktene av til $(1, 2)$ og $(4, 5)$, altså

$$x = \underline{1} \quad \text{eller} \quad x = \underline{4}$$

Kontroll av avlesningen (regning):

$$x + 1 = x^2 - 4x + 5$$

$$0 = x^2 - 5x + 4$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \implies x = 1 \text{ eller } x = 4$$

Setter løsningene inn i $f(x)$ for å finne y-koordinatene: $f(1) = 2$ og $f(4) = 5$, de samme punktene som ble lest av på figuren.

Likningen $f(x) = g(x)$ har de to løsningene $x = 1$ og $x = 4$, som svarer til skjæringspunktene $(1, 2)$ og $(4, 5)$ mellom grafene til f og g .

b) Setter opp ulikheten $g(x) < h(x)$, altså der parabelen g ligger under den rette linja h :

$$x^2 - 4x + 5 < -x + 5$$

$$x^2 - 3x < 0$$

$$x(x - 3) < 0$$

Uttrykket $x(x - 3)$ er negativt når x og $x - 3$ har motsatt fortegn, det vil si når $x > 0$ og samtidig $x < 3$:

$$\underline{0 < x < 3}$$

Alle løsningene i intervallet $\langle 0, 3 \rangle$ er positive tall, slik oppgaven krever.

Argumentasjon: Grafisk er g en parabel med bunnpunkt i $(2, 1)$ som vender grenene oppover, mens h er en fallende rett linje. De to grafene skjærer hverandre i $x = 0$ (der $g(0) = 5 = h(0)$) og $x = 3$ (der $g(3) = 2 = h(3)$). Mellom disse to skjæringspunktene ligger parabelen under linja: for eksempel ved $x = 1$ er $g(1) = 2$ og $h(1) = 4$, altså $g(1) < h(1)$, som stemmer med løsningsmengden.

Ulikheten $g(x) < h(x)$ har løsningsmengden $0 < x < 3$, som består av bare positive x -verdier.

DEL 2 – Med hjelpemidler

Oppgave 1

To kjøp er gjort i samme butikk:

- 2 T-skjorter + 2 bukser = 1496 kr
- 3 T-skjorter + 1 bukse = 1046 kr

Lar t være prisen på en T-skjorte og b være prisen på en bukse, begge i kroner.

Likning I (første kjøp): $2t + 2b = 1496$ **Likning II** (andre kjøp): $3t + b = 1046$

Løser med innsettingsmetoden. Fra Likning II: $b = 1046 - 3t$. Setter dette inn i Likning I:

$$2t + 2(1046 - 3t) = 1496$$

$$2t + 2092 - 6t = 1496$$

$$-4t = 1496 - 2092 = -596$$

$$t = \underline{149}$$

Setter $t = 149$ inn i uttrykket for b :

$$b = 1046 - 3 \cdot 149 = 1046 - 447 = \underline{599}$$

Kontroll: $2 \cdot 149 + 2 \cdot 599 = 298 + 1198 = 1496 \checkmark$ og $3 \cdot 149 + 599 = 447 + 599 = 1046 \checkmark$.

En T-skjorte koster 149 kr, og en bukse koster 599 kr.

Oppgave 2

Tore spør 12 kolleger om antall kopper kaffe de drakk dagen før. Ett av de 12 tallene er dekket av en kaffeflekk i oppgavebildet og er derfor ikke synlig:

$$4, 5, 0, 4, 2, 6, \boxed{x}, 5, 7, 5, 5, 3$$

Antakelse: Siden det tolvte tallet ikke er lesbart, regner jeg videre med det som et ukjent, ikke-negativt helt tall x (antall kopper er en telling), og undersøker for hvilke verdier av x Tores antakelse stemmer.

Formel (gjennomsnitt): $\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{sum av verdiene}}{\text{antall verdier}}$

Summen av de 11 kjente tallene er $4 + 5 + 0 + 4 + 2 + 6 + 5 + 7 + 5 + 5 + 3 = \underline{46}$. Med det ukjente tallet x medregnet, og 12 verdier totalt:

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{46 + x}{12}$$

Tores antakelse er at gjennomsnittet er mer enn 4 kopper:

$$\frac{46 + x}{12} > 4$$

$$46 + x > 48$$

$$x > 2$$

Siden x er et helt tall, betyr dette at antakelsen stemmer dersom $x \geq 3$, og ikke stemmer dersom $x \leq 2$.

Tores antakelse om at gjennomsnittet er over fire kopper, stemmer bare dersom tallet under kaffeflekken er 3 kopper eller mer. Er det dekkede tallet 0, 1 eller 2, blir gjennomsnittet 4 kopper eller mindre, og antakelsen stemmer ikke.

Oppgave 3

Vare A og vare B koster like mye i mai. Fra januar (og videre framover) øker vare A med 7 % per måned, mens vare B synker med 7 % per måned i samme periode.

Formel (vekstfaktor ved prosentvis endring per måned): vekstfaktor = $1 \pm$ prosentendring

Vekstfaktoren for vare A er $1 + 0,07 = 1,07$ per måned, og vekstfaktoren for vare B er $1 - 0,07 = 0,93$ per måned.

Lar P være prisen (lik for begge varer) i mai. Malin påstår at prisen på vare A om 3 måneder (august) er lik prisen vare B hadde for 3 måneder siden (februar).

Formel (verdi et gitt antall måneder fram/tilbake): $\text{verdi}(t) = \text{verdi}(0) \cdot \text{vekstfaktor}^t$

Prisen på vare A i august, 3 måneder etter mai:

$$A_{\text{aug}} = P \cdot 1,07^3 \approx P \cdot 1,2250$$

Prisen vare B hadde i februar, altså 3 måneder før mai, finnes ved å regne prisen i mai tilbake 3 måneder, det vil si å dele på vekstfaktoren 3 ganger:

$$B_{\text{feb}} = \frac{P}{0,93^3} \approx P \cdot 1,2432$$

Sammenligner de to faktorene: $1,2250 < 1,2432$, altså er $A_{\text{aug}} < B_{\text{feb}}$. Forskjellen mellom faktorene er

$$\frac{1,2432 - 1,2250}{1,2250} \cdot 100 \% \approx 1,5 \%$$

Malins påstand stemmer ikke: prisen på vare A om 3 måneder blir ca. 1,5 % lavere enn den prisen vare B hadde for 3 måneder siden. Gunnvor har rett i at de to prisene ikke blir like, selv om de ligger nær hverandre.

Oppgave 4 (vektes 3x)

Madelen har registrert antall syklistar og antall med hjelm hver dag i en uke:

Ukedag	Syklistar	Med hjelm
Mandag	10	7
Tirsdag	15	9
Onsdag	11	6
Torsdag	12	7
Fredag	15	12

Formel (andel med hjelm per dag): andel = $\frac{\text{antall med hjelm}}{\text{antall syklistar}} \cdot 100 \%$

Ukedag	Utrekning	Andel med hjelm
Mandag	$7/10 \cdot 100 \%$	<u>70,0 %</u>
Tirsdag	$9/15 \cdot 100 \%$	<u>60,0 %</u>
Onsdag	$6/11 \cdot 100 \%$	<u>54,5 %</u>
Torsdag	$7/12 \cdot 100 \%$	<u>58,3 %</u>

Ukedag	Utrekning	Andel med hjelm
Fredag	$12/15 \cdot 100\%$	<u>80,0%</u>

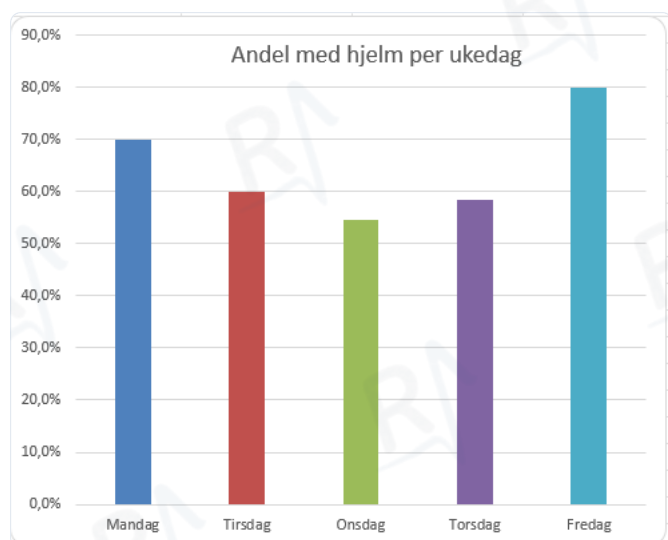
Totalt for hele uken: $10 + 15 + 11 + 12 + 15 = 63$ syklist, hvorav $7 + 9 + 6 + 7 + 12 = 41$ hadde hjelm:

$$\text{andel hele uken} = \frac{41}{63} \cdot 100\% \approx \underline{65,1\%}$$

Presentasjon: Modelen kan lage et søylediagram med ukedagene (mandag–fredag) langs x-aksen og andelen med hjelm (i prosent) langs y-aksen, med én søyle per dag basert på tabellen over. Diagrammet vil vise at hjelmbruken er lavest midt i uken (onsdag og torsdag, ca. 55–58 %) og klart høyest på fredag (80 %), mens mandag og tirsdag ligger midt imellom. I tillegg bør hun oppgi totalandelen for hele uken (ca. 65,1 %) som et samlet nøkkeltall.

	A	B	C	D
1	Ukedag	Syklister	Med hjelm	Andel med hjelm
2	Mandag	10	7	70,0%
3	Tirsdag	15	9	60,0%
4	Onsdag	11	6	54,5%
5	Torsdag	12	7	58,3%
6	Fredag	15	12	80,0%

	A	B	C	D
1	Ukedag	Syklister	Med hjelm	Andel med hjelm
2	Mandag	10	7	=C2/B2
3	Tirsdag	15	9	=C3/B3
4	Onsdag	11	6	=C4/B4
5	Torsdag	12	7	=C5/B5
6	Fredag	15	12	=C6/B6



Modellen bør presentere dataene med et søylediagram som viser andel hjelmbruk per dag (54,5–80,0 %), sammen med totalandelen for hele uken på ca. 65,1 %.

Oppgave 5 (5a vektet 3x)

Årslønn (i tusen kroner) for 146 ansatte, gruppert i intervaller:

Intervall	Frekvens	Midtpunkt
[250, 350)	8	300
[350, 450)	42	400
[450, 500)	40	475
[500, 550)	20	525
[550, 600)	15	575
[600, 650)	3	625
[650, 750)	2	700
[750, 1000)	1	875
[1000, 2000)	15	1500

a) Antakelse: personene er jevnt fordelt innad i hvert intervall, slik at intervallets midtpunkt er representativt for gjennomsnittslønnen i intervallet.

Totalt antall ansatte: $8 + 42 + 40 + 20 + 15 + 3 + 2 + 1 + 15 = 146$.

Formel (gjennomsnitt for gruppert datasett): $\text{gjennomsnitt} \approx \frac{\sum(\text{frekvens} \cdot \text{midtpunkt})}{\text{totalt antall}}$

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{8 \cdot 300 + 42 \cdot 400 + 40 \cdot 475 + 20 \cdot 525 + 15 \cdot 575 + 3 \cdot 625 + 2 \cdot 700 + 1 \cdot 875 + 15 \cdot 1500}{146} \\ &= \frac{2400 + 16800 + 19000 + 10500 + 8625 + 1875 + 1400 + 875 + 22500}{146} = \frac{83975}{146} \approx 575,2 \text{ (tusen kr)}\end{aligned}$$

Formel (median for gruppert datasett): median $= G + \frac{\frac{n}{2} - F}{f} \cdot b$, der G er nedre grense i medianklassen, F er kumulativ frekvens før medianklassen, f er frekvensen i medianklassen, og b er klassebredden.

Kumulativ frekvens: 8, 50, 90, 110, 125, 128, 130, 131, 146. Siden $n/2 = 73$ ligger mellom kumulativ frekvens 50 (etter $[350, 450)$) og 90 (etter $[450, 500)$), er medianklassen $[450, 500)$, med $G = 450$, $F = 50$, $f = 40$ og $b = 50$:

$$\text{median} = 450 + \frac{73 - 50}{40} \cdot 50 = 450 + 28,75 = 478,75 \text{ (tusen kr)}$$

Gjennomsnittlig årslønn er ca. 575 200 kr, og medianårslønnen er ca. 478 750 kr.

b) Gjennomsnittet (ca. 575 200 kr) ligger betydelig høyere enn medianen (ca. 478 750 kr). Dette skyldes at fordelingen er skjev: de 15 ansatte i det høyeste intervallet $[1000, 2000)$ trekker gjennomsnittet kraftig opp, selv om de bare utgjør en liten andel ($15/146 \approx 10,3\%$) av alle ansatte. Medianen påvirkes ikke på samme måte av noen få ekstreme verdier, siden den kun avhenger av hvor midtpunktet i den sorterte rekka ligger.

Medianen er best egnet som sentralt mål for denne lønnsfordelingen, fordi de svært høye lønningene i det øverste intervallet trekker gjennomsnittet urimelig høyt opp og gir et misvisende bilde av hva en typisk ansatt tjener.

Oppgave 6

En rektangulær parkeringsplass med bredde b og lengde l skal endres: bredden minskes med en prosentandel p , og lengden økes med samme prosentandel p .

Formel (areal av rektangel): $A = b \cdot l$

Ny bredde er $b(1 - p)$, og ny lengde er $l(1 + p)$, der $0 < p < 1$. Det nye arealet blir

$$A_{\text{ny}} = b(1 - p) \cdot l(1 + p) = b \cdot l \cdot (1 - p)(1 + p) = b \cdot l \cdot (1 - p^2)$$

Forholdet mellom nytt og gammelt areal er dermed

$$\frac{A_{\text{ny}}}{A} = 1 - p^2$$

Siden $p > 0$, er $p^2 > 0$, og dermed er $1 - p^2 < 1$ uansett hvilken verdi p har (så lenge $p \neq 0$). Det nye arealet er derfor alltid mindre enn det opprinnelige, uavhengig av hvor stor prosentandelen er.

Påstand 1 er riktig: arealet blir alltid mindre, uansett hvor stor prosentandelen er, fordi det nye arealet er det gamle multiplisert med $(1 - p^2)$, som alltid er mindre enn 1 når $p > 0$.

Oppgave 7 (7a vektes 3x)

Sofie har et forbrukslån på 100 000 kr, med rentefot 2 % per måned og et fast terminbeløp på 6378 kr.

a) Feilen i det opprinnelige programmet er at `renter`, `avdrag` og `restlån` settes til 0 i hver runde av løkka, i stedet for å regnes ut fra lånets faktiske tilstand. I tillegg går løkka bare gjennom 4 faste runder (`range(1, 5)`), og gir dermed ikke en fullstendig nedbetalingsplan helt til lånet er nedbetalt.

Formel (renter, avdrag og nytt restlån per termin):

$$\text{renter} = \text{restlån} \cdot \frac{\text{rentefot}}{100}, \quad \text{avdrag} = \text{terminbeløp} - \text{renter}, \quad \text{nytt restlån} = \text{restlån} - \text{avdrag}$$

Setter inn disse formlene i stedet for de tre nullene, og bytter ut den faste `for`-løkka med en `while`-løkke som fortsetter helt til restlånet er nedbetalt:

```
# Definerer variabler
restlån = 100000
terminbeløp = 6378
rentefot = 2

# Overskrifter
print("Måned      Terminbeløp      Renter      Avdrag      Restlån")

måned = 0
while restlån > 0:
    måned = måned + 1
    renter = restlån * rentefot / 100
    avdrag = terminbeløp - renter
    restlån = restlån - avdrag

    # Skriver ut i fem kolonner ved å bruke tabulatorer sep = "\t\t"
    # Runder av beløpene til to desimaler ved å bruke round
    print(måned,
          round(terminbeløp, 2),
          round(renter, 2),
          round(avdrag, 2),
          round(restlån, 2), sep = "\t\t")
```

Med disse endringene regner programmet ut renter av det faktiske restlånet hver måned, avdraget blir differansen mellom terminbeløpet og rentene, og restlånet reduseres måned for måned helt til det er nedbetalt.

De tre nullene erstattes med formlene $\text{renter} = \text{restlån} \cdot \text{rentefot} / 100$, $\text{avdrag} = \text{terminbeløp} - \text{renter}$ og $\text{restlån} = \text{restlån} - \text{avdrag}$, og `for`-løkka byttes ut med en `while`-løkke som kjører helt til restlånet er nedbetalt.

b) Kjører den korrigerte nedbetalingsplanen fra a) måned for måned. De første fire radene stemmer med de generelle formlene:

Måned	Renter (kr)	Avdrag (kr)	Restlån (kr)
1	2000,00	4378,00	95 622,00
2	1912,44	4465,56	91 156,44
3	1823,13	4554,87	86 601,57
4	1732,03	4645,97	81 955,60
...	...	...	...
18	247,74	6130,26	6256,90
19	125,14	6252,86	4,03

Etter 19 terminer er restlånet redusert til kun 4,03 kr, praktisk talt nedbetalt, men ikke helt null. Den 20. (og siste) terminen gjør opp denne lille restsummen, siden terminbeløpet på 6378 kr er langt mer enn det som gjenstår:

20

Det tar 20 måneder før lånet er fullstendig nedbetalt: etter 19 terminer gjenstår bare ca. 4 kr, som gjøres opp med den 20. og siste terminen.