

DEL 1 – Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng)

Formel (prosentvis endring): prosentvis endring = $\frac{\text{endring}}{\text{utgangsverdi}} \cdot 100\%$

Endringen er ny pris minus gammel pris (315 kr – 300 kr = 15 kr), utgangsverdien er den opprinnelige prisen (300 kr):

$$\frac{\text{endring}}{\text{utgangsverdi}} \cdot 100\% = \frac{15}{300} \cdot 100\% = \underline{5\%}$$

Prisen settes opp med 5 %.

Oppgave 2 (1 poeng)

Formel (indeksregning): pris i ønsket år = pris i kjent år $\cdot \frac{\text{indeks i ønsket år}}{\text{indeks i kjent år}}$

Kjent år er 2024, med pris 400 kr og indeks 120. Ønsket år er 2022, med indeks 90:

$$\text{pris i ønsket år} = 400 \cdot \frac{90}{120} = \underline{300 \text{ kr}}$$

Varen kostet 300 kr i 2022, hvis prisen har fulgt indeksen.

Oppgave 3 (2 poeng)

Formel (målestokk): modellhøyde = $\frac{\text{virkelig høyde}}{\text{målestokksfaktor}}$

Virkelig høyde er Eiffeltårnets høyde (330 m), målestokksfaktoren er 1100 (fra målestokken 1:1100):

$$\text{modellhøyde} = \frac{330 \text{ m}}{1100} = 0,3 \text{ m} = \underline{30 \text{ cm}}$$

Ellens modell av Eiffeltårnet er 30 cm høy.

Oppgave 4 (5 poeng)

a)

Pariserhjulet har 20 vogner totalt. Summen av de oppgitte vognene med 1, 2, 3 og 4 personer er $2 + 3 + 4 + 6 = 15$ vogner.

Formel (manglende antall): antall tomme vogner = totalt antall vogner – antall vogner med kjent besetning

$$\text{antall tomme vogner} = 20 - 15 = \underline{5}$$

Stines påstand stemmer: 5 vogner sto tomme.

b)

Fullstendig fordeling: 5 vogner med 0 personer, 2 med 1 person, 3 med 2 personer, 4 med 3 personer, 6 med 4 personer (til sammen 20 vogner).

Formel (gjennomsnitt): gjennomsnitt = $\frac{\text{total sum}}{\text{antall}}$

Total sum er summen av alle personene i alle vognene, antall er antall vogner (20):

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6}{20} = \frac{0 + 2 + 6 + 12 + 24}{20} = \frac{44}{20} = \underline{2,2}$$

For medianen sorteres de 20 vognene stigende etter antall personer: fem 0-er, to 1-ere, tre 2-ere, fire 3-ere, seks 4-ere. Med 20 verdier er medianen gjennomsnittet av 10. og 11. verdi. De 10 første verdiene (posisjon 1–10) dekker 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, og 10. verdi er dermed 2. Den 11. verdien er den første i gruppen med 3 personer, altså 3.

$$\text{median} = \frac{2+3}{2} = \underline{2,5}$$

Gjennomsnittlig antall personer per vogn er 2,2, og medianen er 2,5 personer per vogn.

c)

Kumulativ frekvens for 2 personer per vogn er antall vogner med 2 personer **eller færre**: $5 + 2 + 3 = 10$ av 20 vogner.

$$\frac{10}{20} \cdot 100 \% = \underline{50 \%}$$

Den kumulative frekvensen for 2 personer per vogn er 50%. Praktisk betyr dette at halvparten av vognene på pariserhjulet hadde 2 eller færre personer om bord.

Oppgave 5 (2 poeng)

Formel (Pytagoras): $\text{hypotenus}^2 = \text{katet}_1^2 + \text{katet}_2^2$

Katetene er 6 cm og 8 cm:

$$\text{hypotenus} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = \underline{10} \text{ cm}$$

Siden hypotenusen er diameteren i sirkelen (dette følger av at en trekant innskrevet i en halvsirkel med hypotenusen som diameter alltid er rettvinklet, Thales' setning), er radien halvparten av hypotenusen:

$$r = \frac{10}{2} = \underline{5} \text{ cm}$$

Formel (sirkelareal): $A = \pi r^2$

$$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \approx \underline{78,5 \text{ cm}^2}$$

Sirkelens areal er ca. 78,5 cm², som er større enn 75 cm².

Oppgave 6 (2 poeng)

La S , P og I være prisen i kroner for henholdsvis sukkerspinn, popkorn og softis.

Likning I: $S + P = 90$ **Likning II:** $P + I = 80$ **Likning III:** $S + I = 70$

Bruker addisjonsmetoden: legger sammen alle tre likningene.

$$(S + P) + (P + I) + (S + I) = 90 + 80 + 70$$

$$2S + 2P + 2I = 240$$

$$S + P + I = 120$$

Setter inn Likning II ($P + I = 80$) for å finne S :

$$S = 120 - (P + I) = 120 - 80 = \underline{40}$$

Setter inn Likning III ($S + I = 70$) for å finne P :

$$P = 120 - (S + I) = 120 - 70 = \underline{50}$$

Setter inn Likning I ($S + P = 90$) for å finne I :

$$I = 120 - (S + P) = 120 - 90 = \underline{30}$$

Kontroll: $S + P = 40 + 50 = 90 \checkmark$, $P + I = 50 + 30 = 80 \checkmark$, $S + I = 40 + 30 = 70 \checkmark$.

Sukkerspinn koster 40 kr, popkorn koster 50 kr, og softis koster 30 kr.

Oppgave 7 (4 poeng)

Kaja tar opp et **serielån** (ikke annuitetslån), som betyr at avdraget er likt hver termin, mens terminbeløpet (avdrag + rente) avtar etter hvert som gjelden nedbetales.

a)

Formel (avdrag ved serielån): $\text{avdrag} = \frac{\text{lånebeløp}}{\text{antall terminer}}$

$$\text{avdrag} = \frac{400\,000}{8} = \underline{50\,000 \text{ kr}}$$

Avdraget er 50 000 kr hvert år, i alle 8 årene.

b)

Formel (terminbeløp ved serielån): $\text{terminbeløp} = \text{avdrag} + \text{restgjeld} \cdot \text{rente}$

Restgjelden ved starten av første termin er hele lånet, 400 000 kr:

$$\text{termin 1} = 50\,000 + 400\,000 \cdot 0,05 = 50\,000 + 20\,000 = \underline{70\,000 \text{ kr}}$$

Etter første termin er restgjelden $400\,000 - 50\,000 = 350\,000$ kr:

$$\text{termin 2} = 50\,000 + 350\,000 \cdot 0,05 = 50\,000 + 17\,500 = \underline{67\,500 \text{ kr}}$$

De to første terminbeløpene er 70 000 kr og 67 500 kr.

c)

Med 5 års nedbetalingstid i stedet for 8:

$$\text{avdrag} = \frac{400\,000}{5} = \underline{80\,000 \text{ kr per år}}$$

Restgjelden før tredje termin, etter to avdrag:

$$400\,000 - 2 \cdot 80\,000 = \underline{240\,000 \text{ kr}}$$

Renten i tredje termin:

$$240\,000 \cdot 0,05 = \underline{12\,000 \text{ kr}}$$

Med 5 års nedbetalingstid måtte Kaja betale 12 000 kr i rente i tredje termin.

Oppgave 8 (2 poeng)

Programmet til Johann er:

```
konto = 1500000
uttak = 120000
vf = 1.056
år = 0

while konto >= 120000:
    konto = konto * vf - uttak
    år = år + 1

print("Resultat:")
print(år)
print(konto)
```

`konto` er det arvede beløpet Johann starter med (1 500 000 kr), `uttak` er beløpet han tar ut av kontoen hvert år (120 000 kr), og `vf` er vekstfaktoren kontoen ganges med hvert år (1,056), som tilsvarer en årlig rente på 5,6 %.

Så lenge kontoen er på minst 120 000 kr, kjøres løkken én gang for hvert år: kontoen ganges først med vekstfaktoren (renten for året legges til), deretter trekkes det faste årlige uttaket fra, og telleren `år` økes med 1. Løkken stopper det året kontoen synker under 120 000 kr.

Programmet simulerer Johannis plan år for år, og stopper det året kontoen ikke lenger har minst 120 000 kr igjen å ta ut.

Kjøring av programmet gir:

Resultat:
22
11183.702579092205

De to verdiene som skrives ut forteller: planen varer i 22 hele år før kontoen synker under grensen på 120 000 kr, og etter disse 22 årene står det 11 183,70 kr igjen på kontoen.

DEL 2 – Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

La x være antall måneder etter februar 2025, slik at februar selv svarer til $x = 0$.

a)

Bruker GeoGebra og regresjonsanalyse på punktene $(0, 1267)$, $(1, 1431)$, $(2, 1619)$, $(3, 1788)$, $(4, 2032)$, og velger en eksponentiell modell $f(x) = a \cdot b^x$, siden omsetningen ser ut til å vokse med en fast prosentandel per måned (økende differanser mellom nabomånedene).

GeoGebra gir (avrundet):

$$f(x) = 1271 \cdot 1,124^x$$

Sjekker mot tabellverdien for $x = 4$ (juni 2025):

$$f(4) = 1271 \cdot 1,124^4 \approx 2029$$

Tabellen oppgir 2032 for juni, svært nær modellverdien, så modellen passer godt til dataene.

Modellen er $f(x) = 1271 \cdot 1,124^x$, der x er antall måneder etter februar 2025 og $f(x)$ er omsetningen i kroner.

b)

Vekstfaktoren i modellen er $b \approx 1,124$, som svarer til en økning på ca. 12,4 %.

Tallet 1,124 forteller at omsetningen i nettbutikken øker med ca. 12 % fra én måned til den neste, ifølge modellen.

c)

Likning: $f(x) = 20\,000$

$$1271 \cdot 1,124^x = 20\,000$$

Løser med CAS/GeoGebra (eller ved å ta logaritmen på begge sider):

$$x = \frac{\lg(20\,000/1271)}{\lg(1,124)} \approx 23,6$$

Siden x må være et helt antall måneder, sjekker de to nærmeste heltallene: $f(23) \approx 18\,700$ kr (under målet) og $f(24) \approx 21\,000$ kr (over målet). Måned $x = 24$ svarer til 24 måneder etter februar 2025, altså februar 2027.

Ifølge modellen når Alex først målet på 20 000 kr/måned i februar 2027 (måned $x = 24$).

d)

Juni 2025 svarer til $x = 4$, med faktisk omsetning 2032 kr. Desember 2025 svarer til $x = 10$, altså 6 måneder senere. Skal målet på 20 000 kr nås innen desember, må omsetningen vokse med en (annen, større) vekstfaktor g hver måned fra juli til desember:

Formel (vekstfaktor over flere perioder): sluttverdi = startverdi $\cdot g^{\text{antall perioder}} \implies g = \sqrt[\text{antall perioder}]{\frac{\text{sluttverdi}}{\text{startverdi}}}$

Startverdi er omsetningen i juni (2032 kr), sluttverdi er målet (20 000 kr), antall perioder er 6 (juli–desember):

$$g = \sqrt[6]{\frac{20\,000}{2032}} \approx 1,46$$

En vekstfaktor på 1,46 svarer til en økning på ca. 46 %.

Omsetningen må øke med ca. 46 % per måned fra juli til desember 2025 for at Alex skal nå målet på 20 000 kr/måned innen desember.

Oppgave 2 (5 poeng)

a)

Sorterer innbyggertallene stigende:

55 684, 55 939, 67 372, 96 695, 121 679, 124 540, 198 777, 239 055, 272 125, 1 098 061

Formel (median, partall antall): median er gjennomsnittet av de to midterste verdiene (5. og 6. verdi av 10)

$$\text{median} = \frac{121\,679 + 124\,540}{2} = 123\,110 \text{ innbyggere}$$

Formel (gjennomsnitt): $\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{total sum}}{\text{antall}}$

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{55\,684 + 55\,939 + 67\,372 + 96\,695 + 121\,679 + 124\,540 + 198\,777 + 239\,055 + 272\,125 + 1\,098\,061}{10} = \frac{2\,329\,939}{10}$$

Formel (standardavvik): $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$, der $\bar{x}$ er gjennomsnittet og n er antall verdier (regner her de 10 tettstedene som hele datagrunnlaget, ikke et utvalg fra en større populasjon)

Med GeoGebra/CAS på datasettet:

$$\sigma \approx 297\,300 \text{ innbyggere}$$

Formel (variasjonsbredde): variasjonsbredde = største verdi – minste verdi

$$\text{variasjonsbredde} = 1\,098\,061 - 55\,684 = 1\,042\,377 \text{ innbyggere}$$

Median 123 110, gjennomsnitt 232 993, standardavvik 297 300 og variasjonsbredde 1 042 377 innbyggere.

b)

Gjennomsnittet (232 993) ligger nesten dobbelt så høyt som medianen (123 110). Det skyldes at Oslo, med over 1 million innbyggere, er en ekstremverdi som trekker gjennomsnittet kraftig opp, mens medianen ikke påvirkes av hvor ekstrem den største (eller minste) verdien er.

Jeg er mest enig med den som mener **medianen** gir det mest dekkende bildet av et "typisk" norsk tettsted i denne sammenhengen, fordi datasettet inneholder én svært ekstrem verdi (Oslo) som ikke er representativ for de andre ni tettstedene. Gjennomsnittet er fortsatt nyttig hvis man er interessert i totalbildet (f.eks. samlet folketall), men som mål på en "typisk" størrelse gir medianen et riktigere inntrykk siden den ikke lar seg dominere av én enkelt observasjon.

c)

Danmarks tall: gjennomsnitt 235 549, median 67 832, standardavvik 388 000 (til sammenligning med Norges gjennomsnitt 232 993, median 123 110, standardavvik 297 300).

Gjennomsnittene er nokså like (232 993 mot 235 549), men medianen er langt lavere i Danmark (67 832 mot 123 110), og standardavviket er høyere (388 000 mot 297 300). Dette tyder på at den danske fordelingen er enda skjevare enn den norske: København er trolig en enda mer ekstrem enkeltverdi i det danske datasettet enn Oslo er i det norske, sammenlignet med de øvrige tettstedene, siden gjennomsnittet trekkes opp på tross av at medianen (og dermed de fleste tettstedene) ligger lavere enn i Norge.

Til sammenligning er den danske tettstedsfordelingen mer skjev enn den norske: lignende gjennomsnitt, men lavere median og høyere standardavvik, noe som tyder på en enda mer dominerende hovedstad relativt til de øvrige tettstedene.

Oppgave 3 (4 poeng)

Formel (prosentvis endring 2020–2024): prosentvis endring = $\frac{\text{verdi}_{2024} - \text{verdi}_{2020}}{\text{verdi}_{2020}} \cdot 100\%$

Beregner endringen fra 2020 til 2024 for hver aldersgruppe (endring er verdien i 2024 minus verdien i 2020, utgangsverdien er verdien i 2020):

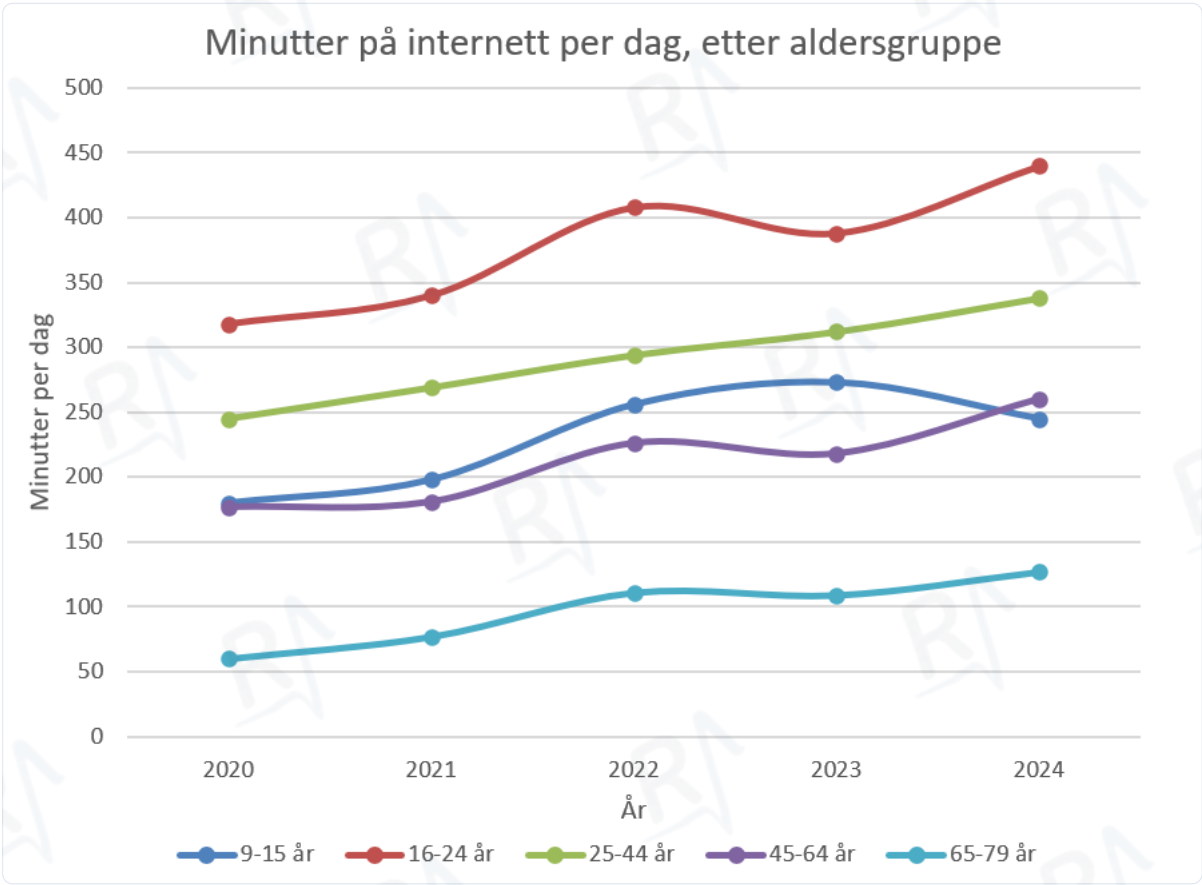
Aldersgruppe	2020 (min)	2024 (min)	Endring (min)	Prosentvis endring
9–15 år	180	245	65	ca. 36 %
16–24 år	318	440	122	ca. 38 %
25–44 år	245	338	93	ca. 38 %
45–64 år	177	260	83	ca. 47 %
65–79 år	60	127	67	ca. 112 %

Aldersgruppe	2020	2021	2022	2023	2024	2020-24 (%)
9-15 år	180	198	256	273	245	36,1 %
16-24 år	318	340	408	388	440	38,4 %
25-44 år	245	269	294	312	338	38,0 %
45-64 år	177	181	226	218	260	46,9 %
65-79 år	60	77	111	109	127	111,7 %

Funn 1: de eldste bruker fortsatt internett minst i minutter, men vokser mest relativt. Aldersgruppen 65–79 år bruker fortsatt klart færrest minutter på internett av alle gruppene (127 minutter i 2024, mot for eksempel 440 minutter for 16–24-åringene), men er samtidig gruppen som har vokst mest relativt: bruken har mer enn doblet seg (ca. 112 % økning) fra 2020 til 2024, langt mer enn noen annen aldersgruppe.

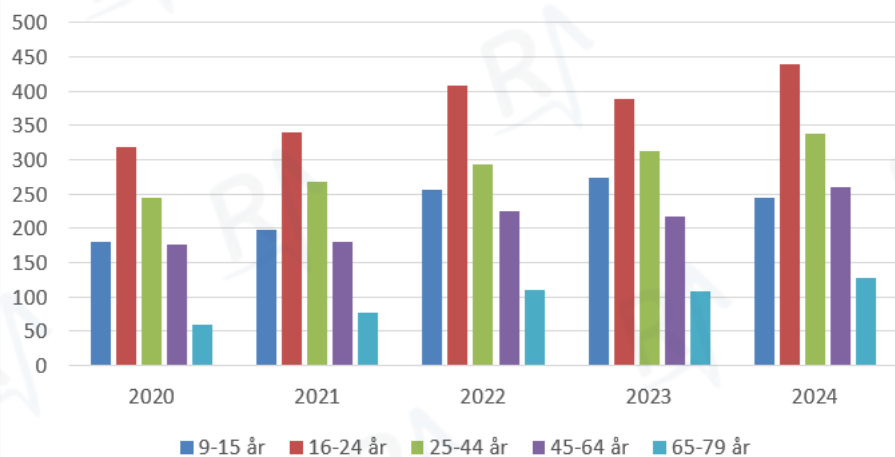
Funn 2: de yngste er eneste gruppe med nedgang det siste året. Aldersgruppen 9–15 år er den eneste av de fem gruppene der internettbruken faller fra ett år til det neste: fra 273 minutter i 2023 til 245 minutter i 2024. Alle de andre fire aldersgruppene fortsetter å øke helt fram til 2024.

Presentasjon: samme datamateriale er visualisert på flere måter for å vise fram ulike sider av utviklingen.

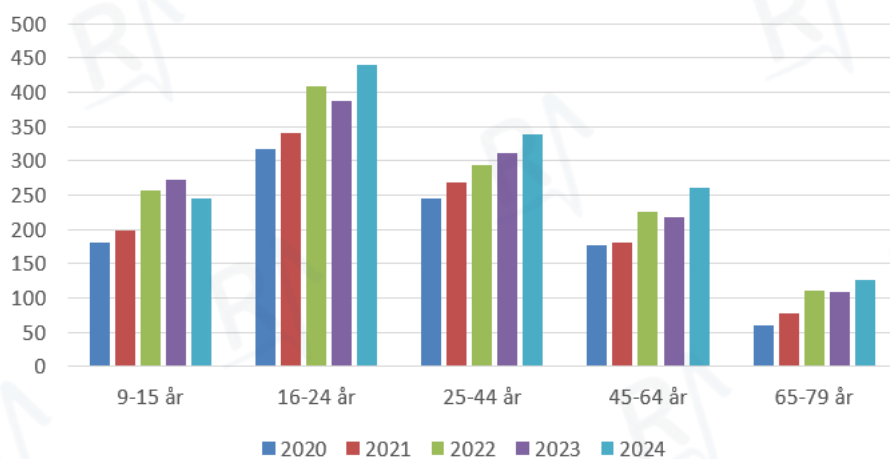


Linjediagrammet over viser utviklingen for hver aldersgruppe over tid — best egnet til å se trender og se hvilke grupper som krysser hverandre (som 9–15 år og 45–64 år rundt 2024).

Minutter på internett per dag, etter aldersgruppe

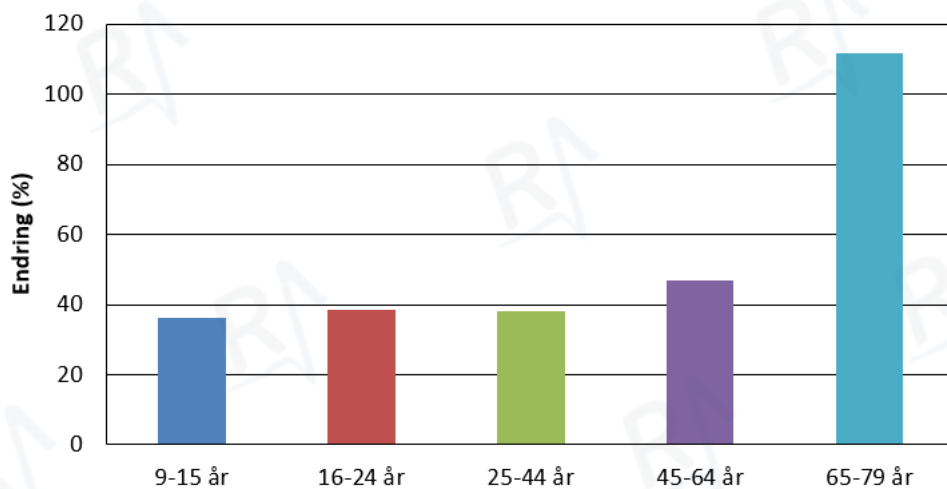


Minutter på internett per dag, etter årstall



De to stolpediagrammene over viser de samme tallene som linjediagrammet, men gruppert på hver sin måte — det første egner seg til å sammenligne aldersgruppene innenfor ett og ett år, det andre til å sammenligne årene innenfor hver aldersgruppe.

Prosentvis endring i internettbruk, 2020-2024



Dette siste diagrammet illustrerer Funn 1 direkte: 65–79-åringene skiller seg klart ut med en relativ vekst på over 100 %, mens de andre fire gruppene ligger mellom 36 % og 47 %.

Oppgave 4 (3 poeng)

Alle tre startet med 100 000 kr i januar 2020.

Fatima (aksjefond, +36 % totalt over 5 år):

$$100\,000 \cdot 1,36 = \underline{136\,000 \text{ kr}}$$

Adrian (sparekonto, 5,7 % årlig rente i 5 år):

Formel (rente over flere år): sluttverdi = startverdi $\cdot (1 + \text{rente})^{\text{antall år}}$

$$100\,000 \cdot 1,057^5 \approx \underline{131\,940 \text{ kr}}$$

Vegard (aksjer, ulik årlig avkastning 2020–2024):

Multipliserer sammen én vekstfaktor per år:

$$100\,000 \cdot 1,20 \cdot 0,89 \cdot 0,90 \cdot 1,23 \cdot 1,17 \approx \underline{138\,330 \text{ kr}}$$

Person	Beløp ved starten av 2025
Fatima	ca. 136 000 kr
Adrian	ca. 131 940 kr
Vegard	ca. 138 330 kr

Vegard sitter igjen med mest penger (ca. 138 330 kr), tett etterfulgt av Fatima (ca. 136 000 kr). Adrian, som valgte den tryggeste spareformen, har minst (ca. 131 940 kr). Til tross for svingningene underveis endte altså både Fatima og Vegards mer risikable plasseringer opp med høyere avkastning enn Adrians sparekonto i denne femårsperioden.

Oppgave 5 (5 poeng)

a)

For å kunne bruke den grupperte tabellen til å regne ut sentralt mål, må vi anta at aldrene er **jevnt fordelt innad i hver aldersgruppe**, slik at midtpunktet i intervallet er representativt for gjennomsnittsalderen til dem i gruppen. Vi må også vite (eller anta) en øvre grense for den eldste gruppen, som her er oppgitt til 100 år.

b)

Formel (gjennomsnitt for gruppert datasett): $\text{gjennomsnitt} = \frac{\sum(\text{midtpunkt}_i \cdot \text{antall}_i)}{\text{total antall}}$

Midtpunktene i de seks intervallene er henholdsvis 9, 34, 58,5, 73,5, 85 og 95 år:

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{9 \cdot 188 + 34 \cdot 347 + 58,5 \cdot 237 + 73,5 \cdot 103 + 85 \cdot 33 + 95 \cdot 15}{188 + 347 + 237 + 103 + 33 + 15} \\ &= \frac{1\,692 + 11\,798 + 13\,864,5 + 7\,570,5 + 2\,805 + 1\,425}{923} = \frac{39\,155}{923} \approx \underline{42,4 \text{ år}}\end{aligned}$$

Gjennomsnittsalderen i Åseral kommune i 2024 var ca. 42,4 år.

c)

Gjennomsnittsalderen (42,4 år) faller innenfor intervallet $[18, 50]$, som har 347 personer. Ved antakelsen om jevn fordeling innad i intervallet finner vi hvor stor andel av dette intervallet som ligger under 42,4 år:

$$\text{andel av intervallet under gjennomsnittet} = \frac{42,4 - 18}{50 - 18} = \frac{24,4}{32} \approx 0,763$$

$$\text{antall i intervallet under gjennomsnittet} \approx 0,763 \cdot 347 \approx 265$$

Legger til de 188 personene i det yngste intervallet, som alle er under gjennomsnittsalderen:

$$\text{antall under gjennomsnittet} \approx 188 + 265 = 453$$

$$\text{antall over gjennomsnittet} \approx 923 - 453 = 470$$

$$\frac{470}{923} \cdot 100\% \approx \underline{51\%}$$

Ca. 51 % av befolkningen i Åseral var eldre enn gjennomsnittsalderen i 2024.

Oppgave 6 (4 poeng)

a)

Formel (volum av rett prisme/lag): $V = \text{lengde} \cdot \text{bredde} \cdot \text{tykkelse}$

Lengden er 25 m, bredden er 60 cm = 0,6 m, og tykkelsen er 75 mm = 0,075 m:

$$V = 25 \cdot 0,6 \cdot 0,075 = \underline{1,125 \text{ m}^3}$$

Eva og Per Ivar må bestille $1,125 \text{ m}^3$ grus.

b)

Formel (volum av kjegle): $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Diameteren på haugen er 2,5 m, altså er radien 1,25 m, og høyden er 1,0 m:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1,25^2 \cdot 1,0 \approx \underline{1,636 \text{ m}^3}$$

Siden $1,636 \text{ m}^3 > 1,125 \text{ m}^3$ (volumet som trengs fra a)), er den leverte haugen med grus stor nok, med god margin (ca. $0,51 \text{ m}^3$ til overs).

Ja, det er levert nok grus: haugen inneholder ca. $1,64 \text{ m}^3$, mens stien bare trenger $1,125 \text{ m}^3$.

© 2026 Ruben S. Johanssen, RubenMatte. Kun til privat bruk og skal ikke deles, publiseres eller selges videre.