

Løsningsforslag — Eksamen 2P Høst 2024 (MAT1023)

DEL 1 – Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng)

Formel (målestokk): målestokk = kartavstand : virkelig avstand

Kartavstanden er 10 cm. Den virkelige avstanden er 5 km, omregnet til samme enhet (cm):

$$5 \text{ km} = 5 \cdot 100\,000 \text{ cm} = \underline{500\,000 \text{ cm}}$$

Målestokken er forholdet mellom kartavstand og virkelig avstand:

$$10 : 500\,000 = \underline{1 : 50\,000}$$

Målestokken til kartet er 1 : 50 000 .

Oppgave 2 (4 poeng)

a)

Sorterer timelisten stigende: 0, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 8.

Formel (gjennomsnitt): $\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{sum av verdiene}}{\text{antall verdier}}$

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{0 + 3 + 3 + 3 + 4 + 5 + 5 + 5 + 6 + 8}{10} = \frac{42}{10} = \underline{4,2 \text{ timer}}$$

Siden det er 10 (partall) verdier, er medianen gjennomsnittet av 5. og 6. verdi i den sorterte listen, som begge er henholdsvis 4 og 5:

$$\text{median} = \frac{4 + 5}{2} = \underline{4,5 \text{ timer}}$$

Lars jobbet i gjennomsnitt 4,2 timer per dag, og medianen er 4,5 timer .

b)

Frekvenstabell for datamaterialet:

Timer	0	3	4	5	6	8
Frekvens	1	3	1	3	1	1

Formel (kumulativ frekvens): kumulativ frekvens for en verdi er summen av frekvensene til og med den verdien.

$$1 + 3 + 1 + 3 = \underline{8}$$

Den kumulative frekvensen for 5 timer er 8 . Dette betyr at Lars jobbet 5 timer eller færre på 8 av de 10 dagene, altså 80 % av dagene.

Oppgave 3 (2 poeng)

Formel (areal av rettvinklet trekant): $A = \frac{1}{2} \cdot \text{katet}_1 \cdot \text{katet}_2$

Arealet av Evens opprinnelige trekant, med kateter 10 cm og 5 cm:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = \underline{25} \text{ cm}^2$$

Formel (arealforhold for formlike figurer): dersom to figurer er formlike med lengdeforhold (skalafaktor) k , er forholdet mellom arealene k^2

Den nye trekanten har areal 64 cm², den gamle 25 cm². Arealforholdet gir skalafaktoren:

$$k^2 = \frac{64}{25} = 2,56 \implies k = \sqrt{2,56} = \underline{1,6}$$

Katetene i den nye trekanten er katetene i den gamle multiplisert med skalafaktoren:

$$10 \cdot 1,6 = \underline{16} \text{ cm}, \quad 5 \cdot 1,6 = \underline{8} \text{ cm}$$

Katetene i den nye trekanten må være 16 cm og 8 cm.

Oppgave 4 (2 poeng)

Likning I: $2x - 6 = y$ **Likning II:** $4x + 2y = 12$

Bruker innsettingsmetoden: setter uttrykket for y fra Likning I inn i Likning II.

$$4x + 2(2x - 6) = 12$$

$$4x + 4x - 12 = 12$$

$$8x = 24$$

$$x = \underline{3}$$

Setter $x = 3$ inn i Likning I for å finne y :

$$y = 2 \cdot 3 - 6 = \underline{0}$$

Kontroll i Likning II: $4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 12 \checkmark$

Løsningen av likningssystemet er $x = 3$ og $y = 0$.

Oppgave 5 (3 poeng)

Programmet til Sara er:

```
def f(x):  
    return 200 * 0.975 ** x  
  
x = 0  
s = 0  
  
while x <= 4:  
    s = s + f(x)  
    x = x + 1
```

print(s)

a) I uttrykket $f(x) = 200 \cdot 0,975^x$ er 200 tonn utslippet bedriften venter i 2025 ($x = 0$), og 0,975 er vekstfaktoren som svarer til en årlig reduksjon på $1 - 0,975 = 0,025$, altså 2,5 %.

Uttrykket i linje 2 er Saras modell for hvor mange tonn CO2 bedriften slipper ut x år etter 2025, dersom utslippet reduseres med 2,5 % hvert år fra et utgangspunkt på 200 tonn i 2025.

b) Løkka går gjennom $x = 0, 1, 2, 3, 4$ (årene 2025–2029) og legger sammen $f(x)$ for hvert av disse årene, altså summerer den de fem årlige utslippene:

$$s = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 200 + 195 + 190,125 + 185,371\,875 + 180,737\,578 \dots \approx \underline{951,2} \text{ tonn}$$

Verdien som skrives ut (ca. 951 tonn) forteller Sara det samlede CO2-utslippet fra bedriften i femårsperioden 2025–2029, dersom den planlagte årlige reduksjonen på 2,5 % holder stikk.

DEL 2 – Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Formel (eksponentiell modell, gitt i oppgaveteksten): $F(x) = 620 \cdot 1,045^x$, der x er antall måneder etter desember 2024.

a) Viser to metoder for å svare på begge deloppgavene.

Metode 1, regning:

1. Desember 2025 er 12 måneder etter desember 2024, altså $x = 12$:

$$F(12) = 620 \cdot 1,045^{12} \approx \underline{1051}$$

2. Løser likningen $F(x) = 2000$ for å finne når salget først passerer 2000 flasker:

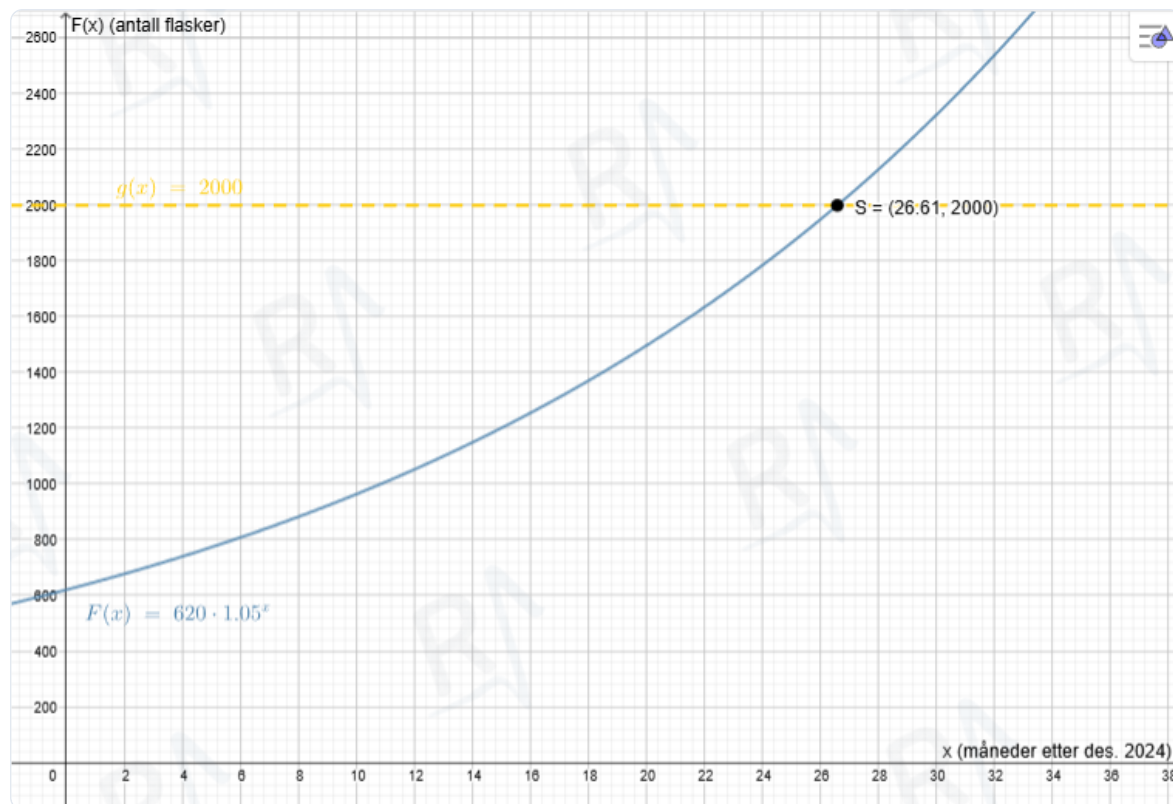
$$620 \cdot 1,045^x = 2000 \implies 1,045^x = \frac{2000}{620} \approx 3,226$$

$$x = \frac{\lg(3,226)}{\lg(1,045)} \approx \underline{26,6}$$

Siden x må være et helt antall måneder, sjekkes de to nærmeste heltallene: $F(26) \approx 1947$ (under 2000) og $F(27) \approx 2035$ (over 2000). Måned $x = 27$ svarer til 27 måneder etter desember 2024, altså mars 2027 (desember 2024 + 24 måneder = desember 2026, pluss 3 måneder til = mars 2027).

Metode 2, GeoGebra (graf):

Tegner grafen til $F(x) = 620 \cdot 1,045^x$ i GeoGebra. Avleser grafverdien ved $x = 12$, som bekrefter ca. 1051 flasker. Tegner deretter den vannrette linjen $y = 2000$ i samme koordinatsystem: skjæringspunktet med grafen til F ligger mellom $x = 26$ og $x = 27$, som bekrefter at grensen på 2000 flasker først krysses i måned $x = 27$.



Ifølge modellen selges det ca. **1051** flasker iste i desember 2025, og salget passerer først 2000 flasker/mnd i **mars 2027**.

b) Desember 2024 er $x = 0$, desember 2026 er $x = 24$.

Formel (prosentvis endring over tid): prosentvis endring = $\left(\frac{F(x_2)}{F(x_1)} - 1\right) \cdot 100\%$

$$F(0) = \underline{620}, \quad F(24) = 620 \cdot 1,045^{24} \approx \underline{1783}$$

$$\left(\frac{1783}{620} - 1\right) \cdot 100\% \approx \underline{188\%}$$

Ifølge modellen øker salget med ca. **188 %** fra desember 2024 til desember 2026.

Oppgave 2 (3 poeng)

Formel (kjøpekraft, lønn omregnet til 2015-kroner): reallønn = lønn $\cdot \frac{KPI_{2015}}{KPI_{\text{år}}}$

Regner om hvert års månedslønn til hva den ville vært verdt i 2015-kroner (KPI i 2015 er 100), for å kunne sammenligne kjøpekraften direkte år for år:

År	Lønn (kr)	KPI	Reallønn i 2015-kr	Endring fra året før
2015	42 580	100,0	42 580	—
2016	43 640	103,6	42 124	-1,1 %
2017	44 660	105,5	42 332	+0,5 %
2018	46 010	108,4	42 445	+0,3 %
2019	47 720	110,8	43 069	+1,5 %
2020	48 750	112,2	43 449	+0,9 %
2021	50 790	116,1	43 747	+0,7 %
2022	53 150	122,8	43 282	-1,1 %

Utrekning bak tabellen, f.eks. for 2022: reallønn = $53\,150 \cdot \frac{100}{122,8} \approx 43\,282$ kr.

Kjøpekraften (reallønnen) svinger opp og ned år for år: den faller i 2016 og 2022 (fordi prisveksten disse årene er større enn lønnsveksten), og øker de andre årene. Samlet sett har kjøpekraften i 2022 (43 282 kr i 2015-kroner) knapt endret seg fra 2015 (42 580 kr), en økning på bare ca. 1,6 % over sju år, til tross for at den nominelle månedslønnen i samme periode økte med hele $(\frac{53\,150}{42\,580} - 1) \cdot 100 \% \approx 25 \%$. Nesten hele lønnsveksten er altså spist opp av prisveksten (KPI).

Oppgave 3 (2 poeng)

Formel (prosent av et tall): $a \% \text{ av } b = \frac{a}{100} \cdot b$

Sammenligner et av oppgaveparene, f.eks. «10 % av 50» mot «50 % av 10»:

$$10 \% \text{ av } 50 = \frac{10}{100} \cdot 50 = \underline{5}, \quad 50 \% \text{ av } 10 = \frac{50}{100} \cdot 10 = \underline{5}$$

Generelt er $a \% \text{ av } b$ lik $\frac{a}{100} \cdot b$, og $b \% \text{ av } a$ er lik $\frac{b}{100} \cdot a$. Begge uttrykkene forenkles til

$$\frac{a}{100} \cdot b = \frac{a \cdot b}{100} = \frac{b \cdot a}{100} = \frac{b}{100} \cdot a$$

siden multiplikasjon er kommutativt, altså at rekkefølgen på faktorene ikke har noe å si for produktet.

Oppgaveparene gir alltid samme svar fordi $a \% \text{ av } b$ og $b \% \text{ av } a$ begge er lik $\frac{a \cdot b}{100}$, bare med faktorene a og b i ulik rekkefølge, og multiplikasjon er kommutativt.

Oppgave 4 (6 poeng)

a)

Sorterer alderen til lag A stigende: 15, 18, 24, 45, 60, 78 år.

Formel (median, partall antall): medianen er gjennomsnittet av de to midterste verdiene

$$\text{median} = \frac{24 + 45}{2} = \underline{34,5} \text{ år}$$

Formel (gjennomsnitt): gjennomsnitt = $\frac{\text{sum av verdiene}}{\text{antall verdier}}$

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{15 + 18 + 24 + 45 + 60 + 78}{6} = \frac{240}{6} = \underline{40} \text{ år}$$

Formel (standardavvik): $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$, der $\bar{x}$ er gjennomsnittet og n er antall verdier (lagets 6 medlemmer regnes her som hele datagrunnlaget)

$$\sigma = \sqrt{\frac{(15 - 40)^2 + (18 - 40)^2 + (24 - 40)^2 + (45 - 40)^2 + (60 - 40)^2 + (78 - 40)^2}{6}} = \sqrt{\frac{3234}{6}} \approx \underline{23,2} \text{ år}$$

Medianalderen i lag A er 34,5 år, gjennomsnittsalderen er 40 år, og standardavviket er ca. 23,2 år.

b) Lag B har både høyere median og høyere gjennomsnitt enn lag A, men lavere standardavvik. Det betyr at aldrene i lag B ligger tettere samlet rundt en høyere alder enn i lag A. Laget har trolig ikke like unge medlemmer som Even (15 år), og er mer aldersmessig ensartet.

Lag C har lavere median enn lag A, men høyere gjennomsnitt og høyere standardavvik. Det betyr at lag C har en enda mer skjev aldersfordeling enn lag A: de fleste medlemmene er trolig yngre enn i lag A (det trekker medianen ned), mens ett eller to svært eldre medlemmer trekker gjennomsnittet opp og gir en enda større spredning i alder (høyere standardavvik) enn i lag A.

Lag B har en høyere, men mer ensartet aldersfordeling enn lag A. Lag C har flest yngre medlemmer, men enkelte svært eldre medlemmer gir laget både et høyere gjennomsnitt og en større aldersspredning enn lag A.

c) Antar for lag B seks aldre samlet tett rundt et punkt høyere enn lag A sin fordeling: 30, 35, 40, 45, 50, 55 år.

$$\text{median} = \frac{40 + 45}{2} = 42,5 \text{ år } (> 34,5), \quad \text{gjennomsnitt} = \frac{255}{6} = 42,5 \text{ år } (> 40)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(30 - 42,5)^2 + \dots + (55 - 42,5)^2}{6}} = \sqrt{\frac{437,5}{6}} \approx 8,5 \text{ år } (< 23,2)$$

Antar for lag C fem yngre medlemmer og ett svært eldre medlem, som gir en skjev fordeling med lav median, men høyt gjennomsnitt og stor spredning: 8, 12, 16, 20, 85, 100 år.

$$\text{median} = \frac{16 + 20}{2} = 18 \text{ år } (< 34,5), \quad \text{gjennomsnitt} = \frac{241}{6} \approx 40,2 \text{ år } (> 40)$$

$$\sigma \approx 37,4 \text{ år } (> 23,2)$$

Eksempel på aldersfordeling for lag B: 30, 35, 40, 45, 50, 55 år (median 42,5, gjennomsnitt 42,5, standardavvik ca. 8,5). **Eksempel på aldersfordeling for lag C:** 8, 12, 16, 20, 85, 100 år (median 18, gjennomsnitt ca. 40,2, standardavvik ca. 37,4). Begge eksemplene stemmer med opplysningene gitt om lag B og C sammenlignet med lag A.

Oppgave 5 (3 poeng)

Pensjonstrekket regnes av fastlønnen, ikke av bruttolønnen inkludert overtid — pensjonsinnskudd beregnes normalt kun av fast lønn. Skattetrekket regnes av bruttolønnen etter at pensjonstrekket er trukket fra (siden pensjonsinnskudd er fradragsberettiget før skatt beregnes).

Formel (timelønn): $\text{timelønn} = \frac{\text{fastlønn}}{\text{avtalt arbeidstid}}$

$$\text{timelønn} = \frac{35\,750}{162,5} = 220 \text{ kr/t}$$

Formel (overtidslønn): $\text{overtidslønn} = \text{timelønn} \cdot (1 + \text{overtidstillegg}) \cdot \text{antall overtidstimer}$

$$\text{overtidslønn} = 220 \cdot 1,40 \cdot 10 = 3080 \text{ kr}$$

Formel (bruttolønn): $\text{bruttolønn} = \text{fastlønn} + \text{overtidslønn}$

$$\text{bruttolønn} = 35\,750 + 3080 = 38\,830 \text{ kr}$$

Formel (pensjonstrekk): $\text{pensjonstrekk} = \text{fastlønn} \cdot 2\%$

$$\text{pensjonstrekk} = 35\,750 \cdot 0,02 = 715 \text{ kr}$$

Formel (skattegrunnlag og skattetrekk): $\text{skattegrunnlag} = \text{bruttolønn} - \text{pensjonstrekk}$, $\text{skattetrekk} = \text{skattegrunnlag} \cdot 18\%$

$$\text{skattegrunnlag} = 38\,830 - 715 = 38\,115 \text{ kr}$$

$$\text{skattetrekk} = 38\,115 \cdot 0,18 \approx 6860,70 \text{ kr}$$

Formel (nettoinntekt): $\text{netto} = \text{skattegrunnlag} - \text{skattetrekk}$

$$\text{netto} = 38\,115 - 6860,70 \approx 31\,254 \text{ kr}$$

Tobines nettoinntekt denne måneden er ca. 31 254 kr .

Oppgave 6 (4 poeng)

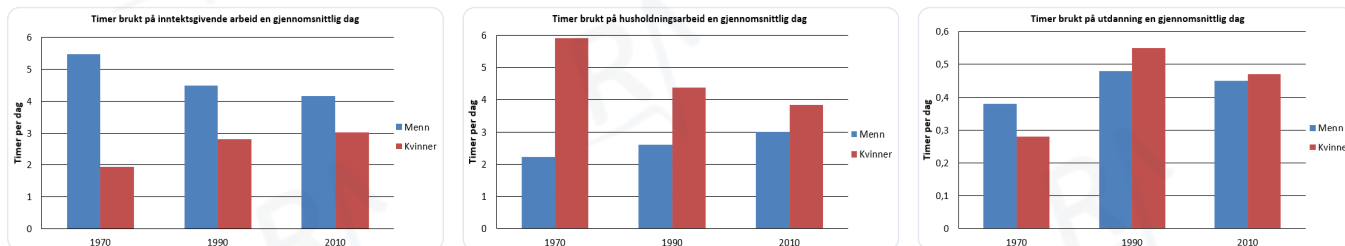
Aktivitet	Kjønn	1970	1990	2010
Inntektsgivende arbeid	Menn	5,48	4,5	4,17
Inntektsgivende arbeid	Kvinner	1,93	2,8	3,02
Husholdningsarbeid	Menn	2,22	2,6	3
Husholdningsarbeid	Kvinner	5,92	4,37	3,83
Utdanning	Menn	0,38	0,48	0,45
Utdanning	Kvinner	0,28	0,55	0,47

Formel (differanse mellom to grupper): differanse = verdi for menn – verdi for kvinner

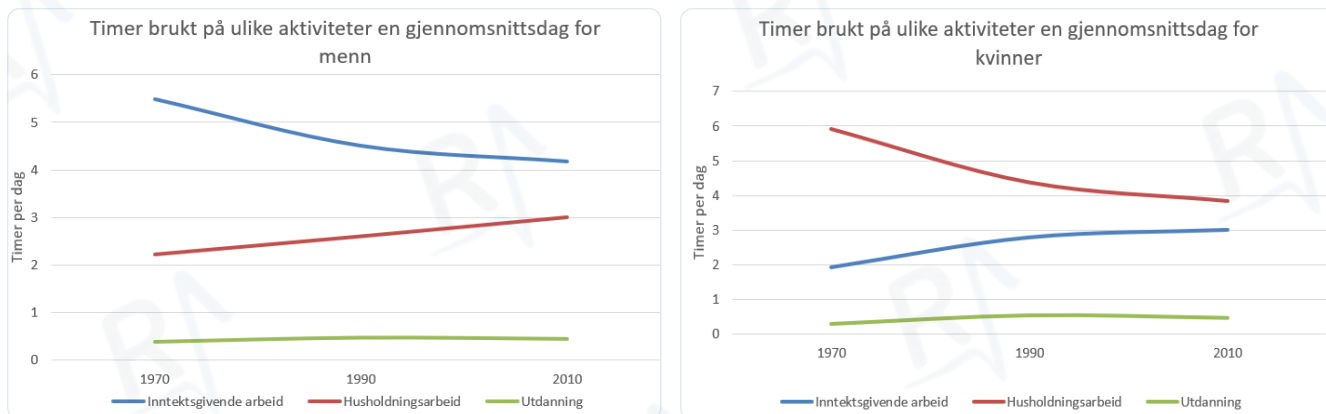
Beregner forskjellen mellom menn og kvinner i hver aktivitet, for hvert av de tre årene:

Aktivitet	Forskjell M-K, 1970	Forskjell M-K, 1990	Forskjell M-K, 2010
Inntektsgivende arbeid	3,55 t	1,70 t	1,15 t
Husholdsarbeid	-3,70 t	-1,77 t	-0,83 t
Utdanning	0,10 t	-0,07 t	-0,02 t

Presentasjon: Lager tre grupperte stolpediagram, ett per aktivitet, som sammenligner menn og kvinner i 1970/1990/2010 hver for seg — med samme skala på y-aksen (0–6 timer) på tvers av diagrammene, slik at forskjellene mellom aktivitetene ikke overdrives visuelt.



I tillegg to linjediagram, ett per kjønn, som viser utviklingen for alle tre aktivitetene samlet over tid:



Funn 1: kjønnsforskjellen i inntektsgivende arbeid minker kraftig. I 1970 arbeidet menn 3,55 timer mer enn kvinner i inntektsgivende arbeid per dag. Denne forskjellen er mer enn halvert innen 1990 (1,70 timer) og er nede i 1,15 timer i 2010, en klar utjevning over de 40 årene, drevet av at kvinners tid i inntektsgivende arbeid øker (fra 1,93 til 3,02 timer) mens menns avtar noe (fra 5,48 til 4,17 timer).

Funn 2: kjønnsforskjellen i husholdsarbeid minker enda mer. I 1970 brukte kvinner 3,70 timer mer enn menn på husholdsarbeid per dag. Innen 2010 er denne forskjellen redusert til bare 0,83 timer, en enda sterkere utjevning enn for inntektsgivende arbeid, drevet både av at kvinners husholdsarbeid faller kraftig (fra 5,92 til 3,83 timer) og at menns husholdsarbeid øker noe (fra 2,22 til 3,00 timer).

Formel (prosentvis differanse, kvinner sammenlignet med menn): prosentvis differanse =

$$\frac{\text{verdi for kvinner} - \text{verdi for menn}}{\text{verdi for menn}} \cdot 100 \%$$

Timedifferansen kan også uttrykkes relativt, som hvor mange prosent mer eller mindre tid kvinner bruker sammenlignet med menn:

Kvinner sammenlignet med menn			
Aktivitet	1970	1990	2010
Inntektsgivende arbeid	-65 %	-38 %	-28 %
Husholdningsarbeid	167 %	68 %	28 %
Utdanning	-26 %	15 %	4 %

Kvinner sammenlignet med menn			
Aktivitet	1970	1990	2010
Inntektsgivende arbeid	$=(C3-C2)/C2$	$=(D3-D2)/D2$	$=(E3-E2)/E2$
Husholdningsarbeid	$=(C5-C4)/C4$	$=(D5-D4)/D4$	$=(E5-E4)/E4$
Utdanning	$=(C7-C6)/C6$	$=(D7-D6)/D6$	$=(E7-E6)/E6$

Funn 3: den prosentvise forskjellen var enda mer ekstrem i 1970 enn timedifferansen alene viser. I 1970 brukte kvinner hele 167 % mer tid enn menn på husholdsarbeid, og 65 % mindre tid enn menn på inntektsgivende arbeid — begge langt kraftigere kontraster enn i 2010, der forskjellene har jevnet seg klart ut (28 % mer husholdsarbeid, 28 % mindre inntektsgivende arbeid for kvinner).

Samlet viser tallene at kjønnsforskjellene i tidsbruk på inntektsgivende arbeid og husholdsarbeid begge er betydelig redusert fra 1970 til 2010, mens tidsbruken på utdanning er nokså lik mellom kjønnene i alle tre årene.

Oppgave 7 (3 poeng)

Formel (lånebeløp fra betalingsplanen): lånebeløp = restlån etter måned 1 + avdrag i måned 1

$$\text{lånebeløp} = 69\,313 + 5687 = \underline{75\,000} \text{ kr}$$

Formel (månedlig rentesats): rente i en måned = restlån ved periodens start · månedlig rentesats

Rentesatsen finnes fra første måned, der restlånet ved periodens start er hele lånebeløpet (75 000 kr) og renten er 1275 kr:

$$\text{rentesats} = \frac{1275}{75\,000} = \underline{0,017} = 1,7 \%$$

Kontrollerer mot andre måned: restlånet ved starten av måned 2 er 69 313 kr, og $69\,313 \cdot 0,017 \approx 1178,32$ kr, som stemmer med tabellen. ✓

Terminbeløpet er tilnærmet konstant (kr 6 962,00 i 11 av 12 måneder), mens avdraget øker for hver måned (5687, 5783.68, 5882.00, ...) og renten avtar tilsvarende. Dette er kjennetegnet på et **annuitetslån** (konstant terminbeløp, økende avdrag). Ved et serielån ville i stedet avdraget vært konstant og terminbeløpet avtakende.

Julia har tatt opp et annuitetslån på 75 000 kr, med en månedlig rente på 1,7 %.

Oppgave 8 (4 poeng)

a)

Sett forfra er lesehulen bygd opp av tre deler i høyden: en rektangulær skuffeseksjon nederst (høyde 480 mm), en rektangulær midtseksjon med den sekskantede inngangen (høyde 1047 mm), og et trekantet takparti øverst (høyde 480 mm), alle med samme bredde, 1000 mm. Dybden er 1000 mm gjennom hele figuren.

Formel (volum av rett prisme = tverrsnittsareal · dybde): $V = A_{\text{tverrsnitt}} \cdot d$

Tverrsnittsarealet (settet forfra) er summen av arealene til de to rektanglene og trekanten:

$$A_{\text{tverrsnitt}} = \underbrace{1000 \cdot 480}_{\text{skuffeseksjon}} + \underbrace{1000 \cdot 1047}_{\text{midtseksjon}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 480}_{\text{takparti}} = 480\,000 + 1\,047\,000 + 240\,000 = \underline{1\,767\,000} \text{ mm}^2$$

Multipliserer med dybden (1000 mm):

$$V = 1\,767\,000 \cdot 1000 = 1\,767\,000\,000 \text{ mm}^3 = \underline{1,767 \text{ m}^3}$$

Volumet av rommet inne i lesehulen er ca. $1,767 \text{ m}^3$.

b)

Formel (areal av en regulær sekskant): $A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot s^2$, der s er sidelengden

Sidelengden i den sekskantede inngangen er 398 mm:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 398^2 \approx \underline{411\,546 \text{ mm}^2}$$

Kontroll mot oppgitt høyde: en regulær sekskant med sidelengde s har flate-til-flate-høyde $s\sqrt{3}$: $398 \cdot \sqrt{3} \approx 689 \text{ mm}$, som stemmer med den oppgitte høyden på 689 mm. Dette bekrefter at inngangen faktisk er en regulær sekskant.

Regner om til kvadratmeter ($1 \text{ m}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$):

$$411\,546 \text{ mm}^2 = \underline{0,412 \text{ m}^2}$$

Arealet av den sekskantede inngangen er ca. $0,412 \text{ m}^2$.

© 2026 Ruben S. Johanssen, RubenMatte. Kun til privat bruk og skal ikke deles, publiseres eller selges videre.