

Løsningsforslag — Eksamen 1P

Vår 2024 (MAT1019)

DEL 1 – Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Formel (promille): $\text{del} = \frac{\text{promille}}{1000} \cdot \text{helhet}$

Delen er 18 millioner mennesker, promillen er 2 (altså $2/1000 = 0,002$), og helheten er verdens befolkning B på dette tidspunktet:

$$0,002 \cdot B = 18\,000\,000 \implies B = \frac{18\,000\,000}{0,002} = \underline{9\,000\,000\,000}$$

Verdens befolkning vil på dette tidspunktet være ca. 9 milliarder ($9 \cdot 10^9$) mennesker.

Oppgave 2 (4 poeng)

Formel (vekstfaktor for sparing): $f(x) = \text{startbeløp} \cdot \text{vekstfaktor}^x$, her $f(x) = 20\,000 \cdot 1,0485^x$.

a) Tallet 20 000 er startbeløpet, det Ada setter inn på kontoen når $x = 0$: $f(0) = 20\,000 \cdot 1,0485^0 = 20\,000$ kroner.

Tallet 1,0485 er vekstfaktoren. Siden vekstfaktoren er knyttet til renten ved $\text{vekstfaktor} = 1 + \text{rentesats}$, svarer 1,0485 til en årlig rente på

$$(1,0485 - 1) \cdot 100\% = \underline{4,85\%}$$

Ada setter inn 20 000 kr, og pengene vokser med 4,85% rente hvert år.

b) Programmet er:

```
def f(x):  
    return 20000 * 1.0485 ** x  
  
start = 0  
slutt = 10
```

```
v = (f(slutt) - f(start))/(slutt - start)
```

```
print(v)
```

Formel (gjennomsnittlig vekstfart, stigningstallet til sekantlinjen): $v = \frac{f(\text{slutt}) - f(\text{start})}{\text{slutt} - \text{start}}$

Programmet regner ut $f(0)$ og $f(10)$ med sparefunksjonen fra oppgaven, $f(x) = 20\,000 \cdot 1,0485^x$:

$$f(0) = 20\,000 \cdot 1,0485^0 = \underline{20\,000}$$

$$f(10) = 20\,000 \cdot 1,0485^{10} \approx \underline{32\,115,47}$$

Setter inn i formelen for v :

$$v = \frac{f(10) - f(0)}{10 - 0} = \frac{32\,115,47 - 20\,000}{10} \approx \underline{1211,55}$$

Tallet som blir skrevet ut, er den gjennomsnittlige spareveksten de første 10 årene:

kontoen øker i snitt med ca. 1211,55 kr per år i denne perioden. Dette er stigningstallet til den rette linjen (sekantlinjen) mellom punktene $(0, 20\,000)$ og $(10, 32\,115,47)$ på grafen til f , ikke den faktiske årlige veksten noe enkelt år (som øker jo lenger tid som går, siden veksten er eksponentiell), men et gjennomsnitt over hele tiårsperioden.

Oppgave 3 (2 poeng)

Fire grafer f , g , p og q er vist i et koordinatsystem med tallfestet rutenett. Følgende er lest av rutenettet (se `oppgaver/1P/V24.md`):

- g : rett linje, skjærer y -aksen i $(0, 300)$.
- f : rett linje, går gjennom origo $(0, 0)$, med stigningstall ≈ 125 , altså $f(x) \approx 125x$.
- q : avtakende kurve, går gjennom $(0, 1000)$.
- p : avtakende kurve, over $y = 1100$ allerede ved $x = 1$, og ned mot $y \approx 70$ ved $x = 15$.

Proporsjonalitet. To størrelser er proporsjonale dersom sammenhengen er $y = k \cdot x$ for en fast konstant k . Grafisk er dette en rett linje som går gjennom origo $(0, 0)$.

- f er en rett linje som går gjennom origo $(0, 0)$, med et stigningstall på ca. 125 langs hele linjen. Dette er nøyaktig definisjonen på en proporsjonal sammenheng: $f(x) = k \cdot x$ med $k \approx 125$. f er derfor proporsjonal.
- g er også en rett linje, men den skjærer y -aksen i $(0, 300)$ og går dermed ikke gjennom origo. Da finnes det ingen konstant k som gir $g(x) = k \cdot x$ for alle x (blant annet er

$g(0) = 300 \neq 0$, mens $k \cdot 0$ alltid er 0). g er derfor ikke proporsjonal.

- p og q er begge kurver, ikke rette linjer. En proporsjonal sammenheng må være en rett linje, så p og q kan uansett ikke være proporsjonale, uavhengig av hvor de starter.

Av grafene er det kun f som viser en proporsjonal sammenheng, fordi det er den eneste som er en rett linje gjennom origo (de andre er enten rette linjer som ikke går gjennom origo, eller kurver).

Omvendt proporsjonalitet. To størrelser er omvendt proporsjonale dersom sammenhengen er $y = \frac{k}{x}$ for en fast konstant k , det vil si at produktet $x \cdot y$ er tilnærmet konstant langs hele grafen, og at grafen går mot uendelig når $x \rightarrow 0^+$.

- p vokser mot uendelig når $x \rightarrow 0^+$ (grafene er allerede over $y = 1100$ ved $x = 1$) og avtar mot lave, positive verdier for store x (ca. $y = 70$ ved $x = 15$). Sjekk om produktet $x \cdot p(x)$ er tilnærmet konstant ved de avleste punktene: ved $x = 1$ er $x \cdot p(x) \gtrsim 1 \cdot 1100 = 1100$, og ved $x = 15$ er $x \cdot p(x) \approx 15 \cdot 70 = 1050$. Produktet holder seg tilnærmet konstant (rundt 1000–1100) langs kurven, som er nettopp den karakteristiske oppførselen til $p(x) = k/x$ med $k \approx 1000$. p er dermed omvendt proporsjonal.
- q er også en avtakende kurve, men q har en endelig verdi ved $x = 0$, nemlig $q(0) = 1000$. En omvendt proporsjonal sammenheng $y = k/x$ er derimot udefinert (går mot uendelig) ved $x = 0$, og kan aldri ha en endelig verdi der. At q starter i et endelig punkt og avtar jevnt derfra, er i stedet typisk oppførsel for en eksponentiell modell (avtar med en fast prosentandel per steg), ikke for en potensmodell k/x . q er derfor ikke omvendt proporsjonal.

Av grafene er det kun p som viser en omvendt proporsjonal sammenheng. q ligner en avtakende kurve, men er ikke omvendt proporsjonal, fordi q har en endelig verdi ved $x = 0$ mens k/x ikke er definert der.

Oppgave 4 (4 poeng)

Formel (bremselengde, gitt i oppgaveteksten): $B = \frac{x^2}{2}$, der $x = \frac{\text{fart i km/h}}{10}$.

a) Farten er 70 km/h, altså

$$x = \frac{70}{10} = 7$$

Setter inn i bremselengdeformelen:

$$B = \frac{x^2}{2} = \frac{7^2}{2} = \frac{49}{2} = \underline{\underline{24,5}}$$

Dette stemmer med Viking Redningstjenestes oppgitte bremselengde på 24,5 meter ved 70 km/h, og viser hvordan tallet kan være regnet ut.

b) Bremselengden er 40,5 meter. Løser formelen for x :

$$\frac{x^2}{2} = 40,5 \implies x^2 = 81 \implies x = \underline{9}$$

Siden $x = \frac{\text{fart}}{10}$, blir farten

$$\text{fart} = 10 \cdot x = 10 \cdot 9 = \underline{90}$$

En bil med bremselengde 40,5 meter kjører ca. 90 km/h .

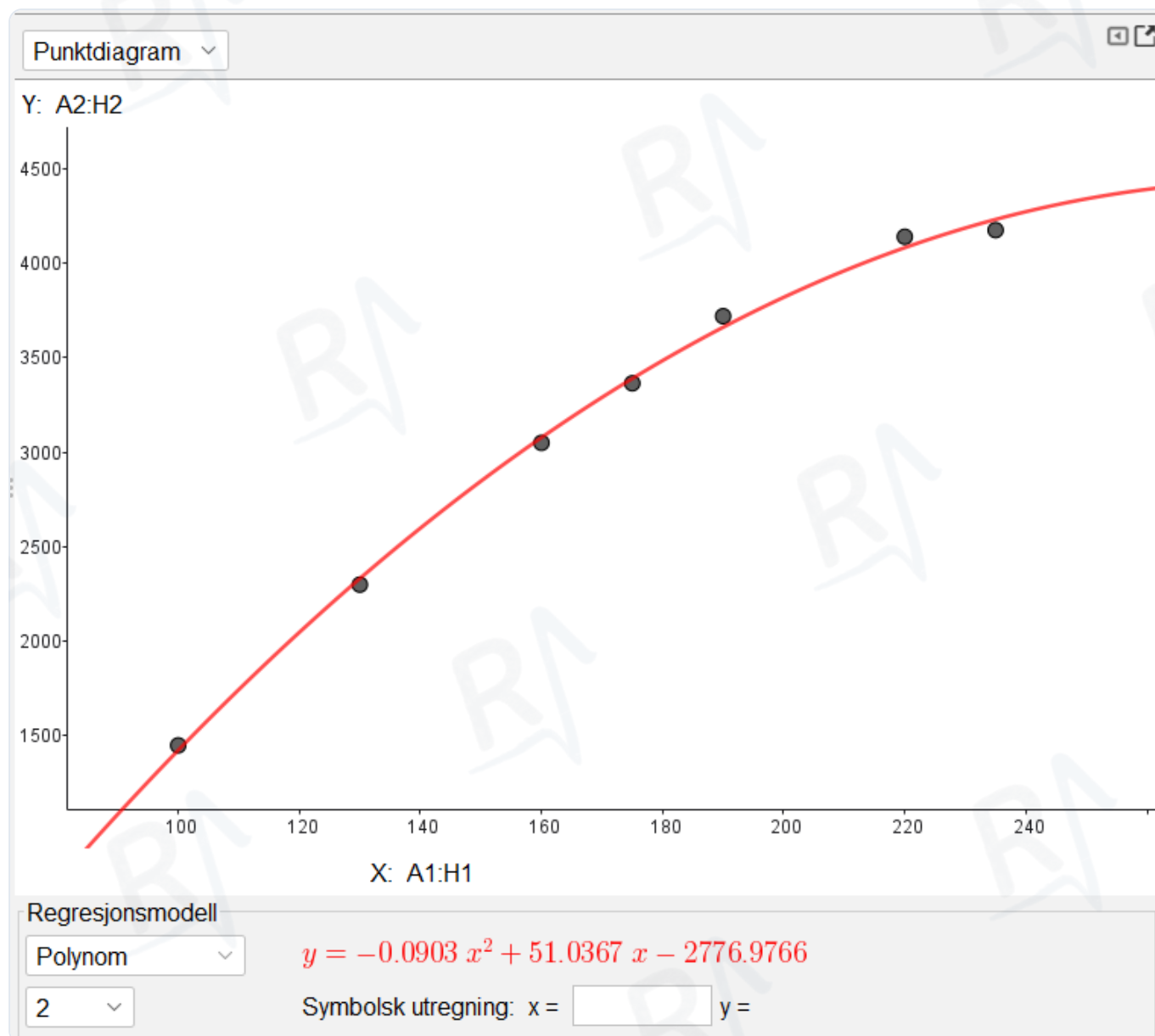
DEL 2 – Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Formel (andregradsmodell, gitt i oppgaveteksten): $O(x) = -0,09x^2 + 51,04x - 2776,98$

a) Bruker GeoGebra: legger de sju datapunktene fra tabellen (antall solgte bagetter, overskudd) inn i regnearket og bruker andregradsregresjon (Regresjon med polynomgrad 2) på punktene.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Solgte bagetter	100	130	160	175	190	220	235
2	Overskudd (kroner)	1450	2300	3050	3365	3720	4140	4175



Regresjonen gir tilnærmet de samme koeffisientene som i modellen $O(x)$ (avvik i tredje desimal). Sjekker modellen mot noen av tabellverdiene:

x (bagetter)	100	160	220	235
Tabellverdi (kr)	1450	3050	4140	4175
$O(x)$ (kr)	1427	3085	4096	4247

Avvikene er små (under 3 % av overskuddet i alle punktene), så $O(x)$ er en god modell for sammenhengen mellom antall solgte bagetter og overskudd.

Regresjonen bekrefter at $O(x) = -0,09x^2 + 51,04x - 2776,98$ er en god modell for overskuddet, siden den treffer de sju datapunktene godt.

b) $O(x)$ er en andregadsfunksjon med negativt ledende koeffisient ($a = -0,09$), så grafen er en parabel som vender grenene nedover og har et toppunkt som gir maksimalt overskudd.

Formel (toppunkt for andregradsfunksjon): $x_{\text{topp}} = -\frac{b}{2a}$

Med $a = -0,09$ og $b = 51,04$:

$$x_{\text{topp}} = -\frac{51,04}{2 \cdot (-0,09)} = \frac{51,04}{0,18} \approx \underline{283,6}$$

Siden antall solgte bagetter må være et helt tall, rundes dette til $x = 284$. Setter inn i $O(x)$:

$$O(284) = -0,09 \cdot 284^2 + 51,04 \cdot 284 - 2776,98 \approx \underline{4459}$$

Størst mulig overskudd oppnås ved å selge ca. 284 bagetter, og overskuddet blir da ca. 4459 kr .

c) Formel (stigningstall): $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Regner ut $O(100)$ og $O(200)$, som blir de to punktene:

$$O(100) = -0,09 \cdot 100^2 + 51,04 \cdot 100 - 2776,98 \approx \underline{1427}$$

$$O(200) = -0,09 \cdot 200^2 + 51,04 \cdot 200 - 2776,98 \approx \underline{3831}$$

Stigningstallet til den rette linjen gjennom $(100, 1427)$ og $(200, 3831)$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3831 - 1427}{200 - 100} = \frac{2404}{100} = \underline{24,0}$$

Stigningstallet er ca. 24 kr/bagett . Dette betyr at i intervallet 100–200 solgte bagetter øker overskuddet i gjennomsnitt med ca. 24 kroner for hver ekstra bagett som selges.

Oppgave 2 (4 poeng)

Formel (rentesparing, vekstfaktor): $K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$, der K_0 er innskuddet, r er årlig rente og n er antall år.

Renten er 3,25 % per år, altså er vekstfaktoren $1 + r = 1,0325$. I dag, fem år etter innskuddet, står det 105 607 kr på kontoen.

a) Hvor mye vil det være på kontoen om fem år (altså ti år etter innskuddet)?

Metode 1, beregning: Dagens beløp vokser videre i fem nye år med samme vekstfaktor:

$$K = 105\,607 \cdot 1,0325^5 \approx \underline{123\,920}$$

Metode 2, grafisk: Legger inn funksjonen $K(t) = 105\,607 \cdot 1,0325^t$ i GeoGebra, der t er antall år fra i dag, og leser av verdien på grafen ved $t = 5$. Grafen viser en stigende, konkav-opp kurve, og punktet ved $t = 5$ ligger ved $y \approx 123\,920$, som stemmer med beregningen.

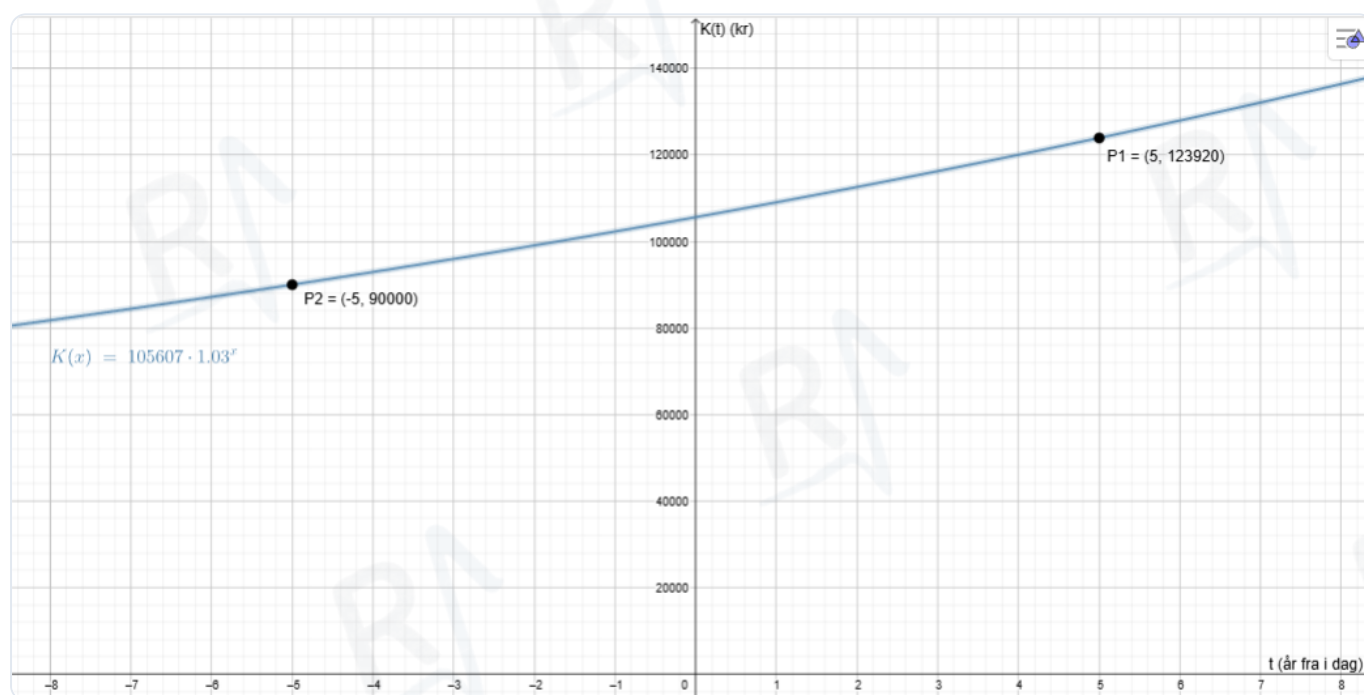
Om fem år vil det stå ca. 123 920 kr på kontoen.

b) Hvor mye satte Gaute inn for fem år siden?

Metode 1, beregning: Dagens beløp er innskuddet K_0 vokst i fem år, så løser vi K_0 ut av vekstformelen:

$$K_0 \cdot 1,0325^5 = 105\,607 \implies K_0 = \frac{105\,607}{1,0325^5} \approx \underline{90\,000}$$

Metode 2, grafisk: Legger inn funksjonen $K(t) = 105\,607 \cdot 1,0325^t$ i GeoGebra (samme graf som i a), men lar nå t telle år bakover fra i dag, og leser av skjæringspunktet ved $t = -5$. Grafen krysser $y \approx 90\,000$ ved $t = -5$, som stemmer med beregningen.



Gaute satte inn ca. 90 000 kr for fem år siden.

Oppgave 3 (4 poeng)

Formel (enhetsomregning, volum): volum i liter = antall fat · liter per fat

a) I 2023 ble det i snitt produsert 1,794 millioner fat olje per døgn, og 1 fat $\approx 158,987$ liter. Volumet per døgn:

$$1,794 \cdot 10^6 \cdot 158,987 \approx \underline{285\,220\,000} \text{ liter/døgn}$$

Volumet for hele 2023 (365 døgn):

$$285\,220\,000 \cdot 365 \approx \underline{1,04 \cdot 10^{11}}$$

Det ble produsert ca. $1,04 \cdot 10^{11}$ liter olje på norsk sokkel i 2023.

b) Formel (prosentvis endring): prosentvis endring = $\frac{\text{ny verdi} - \text{gammel verdi}}{\text{gammel verdi}} \cdot 100 \%$

Ny verdi er produksjonen i 2023 (1,794 millioner fat/døgn), gammel verdi er produksjonen i 2022 (1,685 millioner fat/døgn):

$$\frac{1,794 - 1,685}{1,685} \cdot 100 \% \approx \underline{6,5 \%}$$

Produksjonsmengden steg med ca. $6,5 \%$ fra 2022 til 2023.

Oppgave 4 (4 poeng)

Formel (gjennomsnittlig rundetid): rundetid = $\frac{\text{totaltid}}{\text{antall runder}}$

a) Rekorden på 1500 m er 3:27,14, altså

$$3 \cdot 60 + 27,14 = \underline{207,14} \text{ sekunder}$$

Banen er 400 m, så antall runder på 1500 m er

$$\frac{1500}{400} = \underline{3,75}$$

Gjennomsnittlig rundetid:

$$\frac{207,14}{3,75} \approx \underline{55,2}$$

Den gjennomsnittlige rundetiden i 1500 meter-rekorden er ca. $55,2$ sekunder per runde.

b) Formel (strekning ved jevn fart): $s = v \cdot t$

Rekorden på 1 engelsk mil er 3:43,73, altså

$$3 \cdot 60 + 43,73 = \underline{223,73} \text{ sekunder} = \frac{223,73}{3600} \approx \underline{0,06215} \text{ timer}$$

Snittfarten er oppgitt til 25,89 km/h. Strekningen tilbakelagt på denne tiden:

$$s = v \cdot t = 25,89 \cdot 0,06215 \approx \underline{1,609} \text{ km} = \underline{1609} \text{ m}$$

Ved å bruke $s = v \cdot t$ med den oppgitte snittfarten finner man at 1 engelsk mil tilsvarer ca. 1609 meter, noe som stemmer godt med den faktiske definisjonen av en engelsk mil (1609,344 m).

Oppgave 5 (4 poeng)

Tallfølgen er 2, 5, 11, 23, 47, ...

Ser på forholdet mellom hvert ledd og det forrige: $5 = 2 \cdot 2 + 1$, $11 = 2 \cdot 5 + 1$, $23 = 2 \cdot 11 + 1$, $47 = 2 \cdot 23 + 1$. Mønsteret er at hvert nytt ledd fås ved å doble det forrige leddet og legge til 1:

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1$$

Mønsteret i tallfølgen er at hvert ledd (fra og med det andre) er lik det doble av forrige ledd, pluss 1: $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

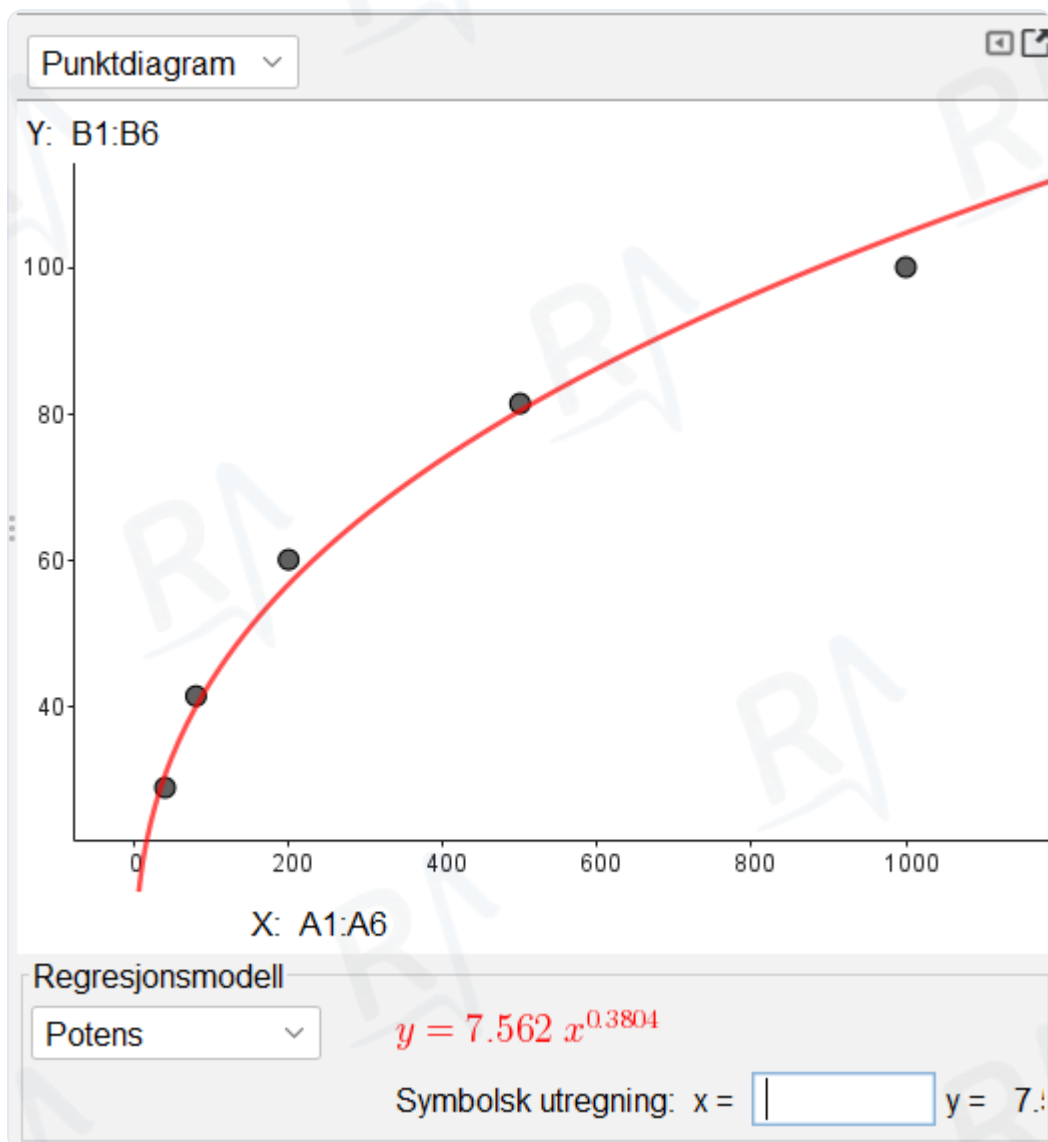
For at et heltall a_{n+1} skal være et oddetall, må det være på formen $2k + 1$ for et heltall k . Fra sammenhengen over er nettopp $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1$, det vil si $2k + 1$ med $k = a_n$. Uansett om a_n selv er et partall eller oddetall, blir $2 \cdot a_n$ alltid et partall, og et partall pluss 1 er alltid et oddetall.

Alle ledd i følgen unntatt det første er oddetall, fordi hvert ledd (fra og med det andre) beregnes som to ganger forrige ledd pluss 1, og to ganger et helt tall pluss 1 er alltid et oddetall, uavhengig av hvilket tall man starter med. Det første leddet, 2, er derimot gitt direkte og ikke beregnet på denne måten, så argumentet gjelder ikke for det.

Oppgave 6 (8 poeng)

a) Bruker GeoGebra: legger de fem datapunktene (lufttrykk x , kokepunkt K) inn i regnearket og bruker potensregresjon (Regresjon med potens-modell) til å tilpasse $K(x) = a \cdot x^b$.

	A	B
1	Lufttrykk (hPa)	Kokepunkt for vann (°C)
2	1000	100
3	500	81.4
4	200	60.1
5	80	41.5
6	40	29



Regresjonen gir

$$a \approx \underline{7,562}, \quad b \approx \underline{0,3804}$$

Sjekker modellen mot tabellverdiene:

x (hPa)	1000	500	200	80	40
Tabell $K(x)$ (°C)	100	81,4	60,1	41,5	29
Modell $K(x)$ (°C)	104,7	80,4	56,8	40,1	30,8

Modellen følger den samme økende, konkav-ned trenden som tabellen (kokepunktet øker med lufttrykket, men flatere ut ved høyt trykk), med avvik på noen få grader i endepunktene.

$K(x) = 7,562 \cdot x^{0,3804}$ er en modell for sammenhengen mellom lufttrykk og kokepunkt.

b) Formel (vekstfaktor per km ved eksponentiell avtakning): $P(h) = P_0 \cdot \text{vekstfaktor}^h$, der h er høyde over havet i km og P_0 er trykket ved havnivå.

Aris modell: trykket minker med 12 % per km, altså er vekstfaktoren $1 - 0,12 = 0,88$ per km:

$$P_{\text{Ari}}(h) = \underline{P_0 \cdot 0,88^h}$$

Lisas modell: trykket halveres per 5,5 km. Vekstfaktoren per hele kilometer, k , må da oppfylle $k^{5,5} = 0,5$:

$$k = 0,5^{1/5,5} \approx \underline{0,8816}$$

$$P_{\text{Lisa}}(h) = \underline{P_0 \cdot 0,8816^h}$$

Ari sin modell gir $P_{\text{Ari}}(h) = P_0 \cdot 0,88^h$, mens Lisa sin modell gir $P_{\text{Lisa}}(h) = P_0 \cdot 0,8816^h$. De to modellene er svært like, siden 0,88 og 0,8816 ligger nær hverandre.

c) Oppgaveteksten oppgir at lufttrykket ved havets overflate er ca. 1000 hPa, så $P_0 = 1000$ hPa.

Egg blir hardkokt når vanntemperaturen (kokepunktet) er minst 85 °C. Finner først hvilket lufttrykk som gir $K(x) = 85$, ved å bruke modellen fra a):

$$7,562 \cdot x^{0,3804} = 85 \implies x = \left(\frac{85}{7,562} \right)^{1/0,3804} \approx \underline{578,5 \text{ hPa}}$$

Bruker deretter høydemodellene fra b) til å finne hvilken høyde h som gir dette trykket, med $P_0 = 1000$ hPa:

$$1000 \cdot 0,88^h = 578,5 \implies h = \frac{\ln(578,5/1000)}{\ln 0,88} = 4,28 \text{ km (Aris modell)}$$

$$1000 \cdot 0,8816^h = 578,5 \implies h = \frac{\ln(578,5/1000)}{\ln 0,8816} = 4,34 \text{ km (Lisas modell)}$$

De to modellene gir tilnærmet samme svar, og begge runder til 4,3 km.

Det er mulig å få hardkokte egg (kokepunkt minst 85 °C) opp til ca. 4,3 km over havet. Høyere opp enn dette blir lufttrykket, og dermed kokepunktet, for lavt til at vannet blir varmt nok til å hardkoke egget.

Oppgave 7 (4 poeng)

Formel (rabattprosent fordelt proporsjonalt): $\text{rabattandel} = \frac{\text{samlet besparelse}}{\text{samlet ordinær pris}}$

Tre par sko kjøpes til sammen: 800 kr og 1550 kr (dine to par) og 1350 kr (vennens par). Samlet ordinær pris:

$$800 + 1550 + 1350 = \underline{3700} \text{ kr}$$

Tilbudet gir det billigste paret (800 kr) gratis, så besparelsen er 800 kr, og total sum å betale blir

$$3700 - 800 = \underline{2900} \text{ kr}$$

For å fordele besparelsen rettferdig mellom deg og vennen, proporsjonalt med hvor mye hver av dere opprinnelig skulle betalt, regner vi ut hvor stor andel av totalprisen besparelsen utgjør:

$$\text{rabattandel} = \frac{800}{3700} \approx \underline{0,2162} = \underline{21,6 \%}$$

Hver person betaler da sin egen ordinære sum redusert med denne rabattandelen. Din ordinære sum er $800 + 1550 = 2350$ kr, vennens er 1350 kr:

$$\text{din betaling} = 2350 \cdot (1 - 0,2162) \approx \underline{1842} \text{ kr}$$

$$\text{vennens betaling} = 1350 \cdot (1 - 0,2162) \approx \underline{1058} \text{ kr}$$

Kontroll: $1842 + 1058 = 2900$ kr, som stemmer med summen som faktisk skal betales. ✓

Ved å fordele rabatten proporsjonalt med hver persons ordinære kjøpesum bør du betale ca. 1842 kr , og vennen din bør betale ca. 1058 kr .

© 2026 Ruben S. Johanssen, RubenMatte. Kun til privat bruk og skal ikke deles, publiseres eller selges videre.