

Løsningsforslag — Eksamen 1P

Vår 2023 (MAT1019)

DEL 1 – Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Formel (prosentvis endring): prosentvis endring = $\frac{\text{ny verdi} - \text{gammel verdi}}{\text{gammel verdi}} \cdot 100\%$

Sjokoladeplaten koster 20 kr i butikken og 50 kr på bensinstasjonen.

Markos påstand («150 % dyrere på bensinstasjon enn i butikk») bruker butikkprisen som utgangspunkt. Gammel verdi er butikkprisen (20 kr), ny verdi er bensinstasjonsprisen (50 kr):

$$\frac{50 - 20}{20} \cdot 100\% = \frac{30}{20} \cdot 100\% = \underline{150\%}$$

Maris påstand («60 % billigere i butikk enn på bensinstasjon») bruker bensinstasjonsprisen som utgangspunkt. Gammel verdi er bensinstasjonsprisen (50 kr), ny verdi er butikkprisen (20 kr):

$$\frac{20 - 50}{50} \cdot 100\% = \frac{-30}{50} \cdot 100\% = \underline{-60\%}$$

altså en nedgang på 60 %.

Begge har regnet riktig. De får ulike prosenttall fordi prosentregning alltid er knyttet til en referanseverdi (100 %-grunnlaget), og de to bruker ulike referanseverdi: Marko regner ut fra butikkprisen (20 kr), mens Mari regner ut fra bensinstasjonsprisen (50 kr). Siden 30 kr er en større andel av 20 kr enn av 50 kr, blir prosenttallet størst når det regnes ut fra den laveste prisen.

Oppgave 2

Formel (produkt av to store tall på standardform): antall maur = antall mennesker · forholdstall

Antall mennesker er 8 milliarder, altså $8 \cdot 10^9$. Forholdstallet er 2,5 millioner ganger så mange maur som mennesker, altså $2,5 \cdot 10^6$:

$$8 \cdot 10^9 \cdot 2,5 \cdot 10^6 = (8 \cdot 2,5) \cdot 10^{9+6} = 20 \cdot 10^{15} = \underline{2 \cdot 10^{16}}$$

Det er omtrent $2 \cdot 10^{16}$ maur på jorda.

Oppgave 3

a) Proporsjonale størrelser. Jeg velger kjøp av epler til fast kilopris som eksempel. La x = antall kilo epler, og la y = totalprisen i kroner. Med en kilopris på 30 kr/kg er sammenhengen

$$y = 30x$$

Formel (proporsjonalitet): to størrelser er proporsjonale dersom forholdet mellom dem er konstant, det vil si at $\frac{y}{x} = k$ for en fast konstant k .

Her er $\frac{y}{x} = \frac{30x}{x} = 30$ for alle $x > 0$. Forholdet er konstant, så x og y er proporsjonale. Grafen er en rett linje gjennom origo med stigningstall 30: jo mer epler man kjøper, desto mer koster det, i nøyaktig samme forhold hele tiden.

b) Omvendt proporsjonale størrelser. Jeg velger kjøretid ved en fast reisestrekning som eksempel. La x = farten i km/t, og la y = tiden i timer det tar å kjøre en strekning på 120 km. Sammenhengen er

$$y = \frac{120}{x}$$

Formel (omvendt proporsjonalitet): to størrelser er omvendt proporsjonale dersom produktet mellom dem er konstant, det vil si at $x \cdot y = k$ for en fast konstant k .

Her er $x \cdot y = x \cdot \frac{120}{x} = 120$, konstant for alle $x > 0$. Dermed er farten og tiden omvendt proporsjonale. Grafen er en avtakende hyperbelgren: den faller brått ved lave farter (lang kjøretid) og flater gradvis ut mot null ved høye farter (kort kjøretid), uten noen gang å nå x-aksen.

Oppgave 4

a) Setter opp punktene fra tabellen: (4, 100), (5, 107), (8, 128), (10, 142).

Formel (stigningstall): $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Sjekker stigningstallet mellom hvert par nabopunkter, med alder som x og høyde som y :

$$\text{mellom (4, 100) og (5, 107) : } a = \frac{107 - 100}{5 - 4} = 7$$

mellom (5, 107) og (8, 128) : $a = \frac{128 - 107}{8 - 5} = \frac{21}{3} = 7$

mellom (8, 128) og (10, 142) : $a = \frac{142 - 128}{10 - 8} = \frac{14}{2} = 7$

Stigningstallet er 7 cm/år i alle tre intervallene. Punktene ligger altså på nøyaktig samme rette linje. Dette gir en lineær modell $h(x) = a \cdot x + b$. Setter inn punktet (4, 100) for å finne konstantleddet b :

$$100 = 7 \cdot 4 + b \implies b = 100 - 28 = \underline{72}$$

Modellen for sammenhengen mellom alder x (år) og høyde $h(x)$ (cm) er $h(x) = 7x + 72$.

b) Setter $x = 19$ inn i modellen fra a):

$$h(19) = 7 \cdot 19 + 72 = 133 + 72 = \underline{205}$$

Ifølge modellen vil Klara være ca. 205 cm høy ved 19 år.

c) Klara var 50 cm ved fødsel, altså ved $x = 0$. Setter $x = 0$ inn i modellen:

$$h(0) = 7 \cdot 0 + 72 = \underline{72} \text{ cm}$$

Modellen gir 72 cm ved fødsel, mens Klara faktisk var 50 cm, et avvik på hele 22 cm. I tillegg gir modellen en høyde på ca. 205 cm ved 19 år (fra b), som er urealistisk høyt for et menneske.

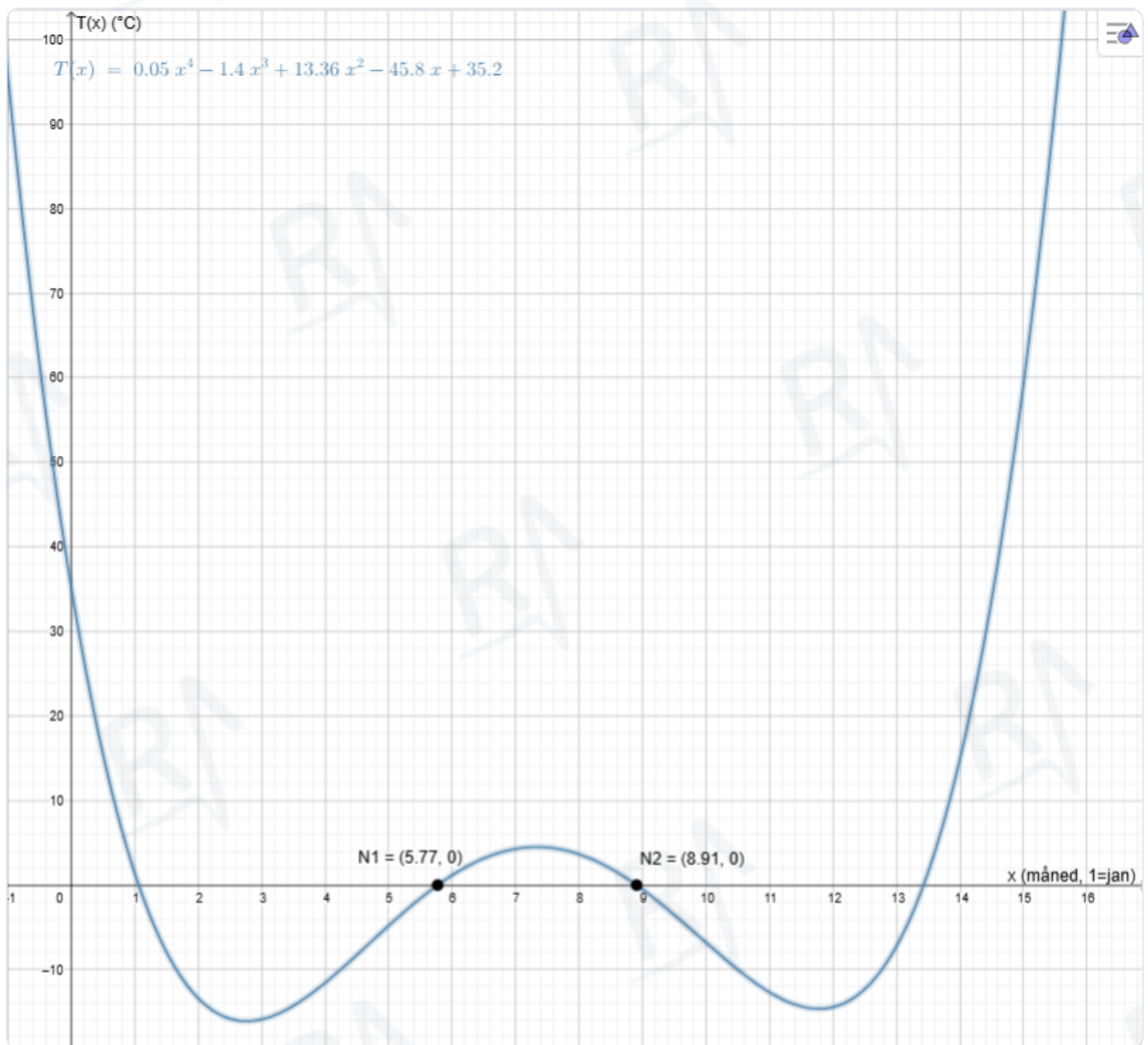
Modellen er ikke gyldig langt utenfor det målte intervallet (4–10 år). Innenfor og nær dette intervallet passer den lineære modellen godt, fordi alle måledataene faktisk ligger nøyaktig på linjen. Men høydevekst hos mennesker er ikke lineær over hele livsløpet (veksten avtar og stopper etter puberteten), så modellen bør ikke brukes til å anslå høyde verken ved fødsel eller langt inn i tenårene.

DEL 2 – Med hjelpemidler

Oppgave 1

Formel (modell for gjennomsnittstemperatur, gitt i oppgaveteksten): $T(x) = 0,048x^4 - 1,4x^3 + 13,36x^2 - 45,8x + 35,2$, for $2 \leq x \leq 10$

a) Bruker GeoGebra til å finne nullpunktene til $T(x)$ i intervallet $[2, 10]$ (kommandoen Nullpunkt, eller ved å lese av skjæringspunktene mellom grafen og x-aksen):



$$T(x) = 0 \text{ for } x \approx \underline{5,77} \text{ og } x \approx \underline{8,91}$$

Kontrollerer fortegnet til $T(x)$ mellom nullpunktene, for eksempel $T(7) = 4,29 > 0$, og utenfor, for eksempel $T(2) = -13,39 < 0$: temperaturen er altså over 0°C nøyaktig i intervallet $x \in (5,77; 8,91)$.

Formel (antall dager i en del av x-intervallet): siden $x = 2$ tilsvarer 1. februar og hvert steg på 1 i x tilsvarer én kalendermåned, regnes en x-lengde om til dager ved å multiplisere med antall dager i den aktuelle måneden.

Nullpunktet $x \approx 5,77$ ligger i mai (x mellom 5 og 6, som er 1. mai–1. juni, 31 dager i mai). Andelen av mai som gjenstår etter nullpunktet er $6 - 5,77 = 0,23$:

$$0,23 \cdot 31 \approx \underline{7} \text{ dager igjen av mai}$$

Nullpunktet $x \approx 8,91$ ligger i august (x mellom 8 og 9, 31 dager i august). Andelen av august som er passert er $8,91 - 8 = 0,91$:

$$0,91 \cdot 31 \approx \underline{28} \text{ dager inn i august}$$

Legger sammen dagene med $T(x) > 0$: resten av mai (7 dager) + hele juni (30 dager) + hele juli (31 dager) + begynnelsen av august (28 dager):

$$7 + 30 + 31 + 28 = \underline{96}$$

Ifølge modellen er gjennomsnittstemperaturen over 0°C i ca. 96 døgn i perioden, omtrent fra slutten av mai til slutten av august.

b) Formel (stigningstall): $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Regner ut $T(3)$ og $T(7)$, som blir våre to punkter:

$$T(3) = 0,048 \cdot 3^4 - 1,4 \cdot 3^3 + 13,36 \cdot 3^2 - 45,8 \cdot 3 + 35,2 \approx \underline{-15,87}$$

$$T(7) = 0,048 \cdot 7^4 - 1,4 \cdot 7^3 + 13,36 \cdot 7^2 - 45,8 \cdot 7 + 35,2 \approx \underline{4,29}$$

Stigningstallet til linjen gjennom $(3, T(3))$ og $(7, T(7))$:

$$a = \frac{T(7) - T(3)}{7 - 3} = \frac{4,29 - (-15,87)}{4} = \frac{20,16}{4} \approx \underline{5,04}$$

Stigningstallet er ca. $5,04^\circ\text{C}$ per x-enhet. Dette betyr at i perioden fra 1. mars til 1. juli øker gjennomsnittstemperaturen på Svalbard i modellen med i gjennomsnitt ca. 5°C per måned.

Oppgave 2

De fire grafene viser lengden y (km) av Auroras tur hjemmefra som funksjon av tiden x (minutter):

- **Graf A:** stiger, flater ut til en kort «hylle», og stiger deretter videre. Den når aldri ned igjen mot 0.

- **Graf B:** en jevnt buet kurve (parabelform) som stiger og synker tilbake til 0, uten noen flat del.
- **Graf C:** stiger med et lite knekk (kort flat bit) midt i stigningen, men fortsetter oppover og går aldri nedover igjen.
- **Graf D:** stiger som en rett linje, flater helt ut på et konstant nivå, og synker deretter som en rett linje helt ned til 0.

Aurora går med **jevn fart** til postkontoret. Det gir en rett, stigende linje (jevn fart betyr konstant stigningstall, altså en rett linje, ikke en kurve). Deretter **står hun i kø**, og avstanden fra hjemmet er da konstant. Det gir en vannrett («flat») del av grafen. Til slutt går hun med jevn fart **hjem igjen**, og avstanden avtar da jevnt tilbake til 0 (hun er jo hjemme igjen til slutt). Det gir en rett, synkende linje ned til x-aksen.

Graf B er buet og passer ikke, siden farten skal være jevn (rette linjer, ikke kurver). Graf A og C stiger hele tiden og vender aldri tilbake til 0, så de kan ikke beskrive en tur som ender hjemme igjen. Bare graf D har alle tre delene i riktig rekkefølge: rett stigende linje, flat del, rett synkende linje tilbake til 0.

Grafisk framstilling **D** beskriver best lengden av Auroras tur som funksjon av tiden.

Oppgave 3

Formel (omkrets av innhegning med tre gjerdede sider): $O = L + 2B$, der L er siden bort fra elva og B er de to sidene vinkelrett på elva (siden mot elva trenger ikke gjerde).

a) Tauet er 80 meter, og lengden er $L = 60$ meter:

$$60 + 2B = 80 \implies 2B = 20 \implies B = \underline{10} \text{ m}$$

Formel (areal av rektangel): $A = L \cdot B$

$$A = 60 \cdot 10 = \underline{600}$$

Arealet blir 600 m^2 når lengden er 60 meter.

b) Uttrykker lengden ved bredden fra formelen i a): $L = 80 - 2B$. Arealet som funksjon av bredden B er da $A(B) = B \cdot (80 - 2B)$. Lager en systematisk oversikt for ulike verdier av B :

B (m)	10	15	18	20	22	25	30
$L = 80 - 2B$ (m)	60	50	44	40	36	30	20
Areal (m^2)	600	750	792	800	792	750	600

Oversikten viser at arealet øker fram til $B = 20$ (der $L = 40$), og deretter avtar igjen. Arealet ser ut til å bli størst nettopp når $L = 2B$ ($40 = 2 \cdot 20$), akkurat som Herman påstår.

c) Setter opp arealet som funksjon av bredden B , ved å bruke omkretsformelen fra a) og arealformelen:

$$A(B) = B \cdot (80 - 2B) = 80B - 2B^2$$

Dette er en andregradsfunksjon med negativt ledende koeffisient (-2), så grafen er en parabel som vender grenene nedover og har et toppunkt som gir størst mulig areal.

Formel (toppunkt for andregradsfunksjon): $B_{\text{topp}} = -\frac{b}{2a}$, der $A(B) = aB^2 + bB + c$ med $a = -2$ og $b = 80$:

$$B_{\text{topp}} = -\frac{80}{2 \cdot (-2)} = \underline{20}$$

Finner tilhørende lengde med formelen fra a):

$$L = 80 - 2 \cdot 20 = \underline{40}$$

Siden $40 = 2 \cdot 20$, er $L = 2B$ nøyaktig ved toppunktet. Setter $B = 20$ inn i arealformelen for å finne det maksimale arealet:

$$A(20) = 20 \cdot 40 = \underline{800}$$

Grafen til $A(B) = 80B - 2B^2$ er en parabel med toppunkt i $B = 20$ (og $L = 40$), som gir det størst mulige arealet på 800 m^2 . Dette viser at Hermans påstand stemmer: arealet blir størst nettopp når lengden er dobbelt så lang som bredden.

Oppgave 4

Formel (pris per kg som stigningstall fra origo): for et punkt (x, y) i diagrammet, der x er vekt og y er pris, er prisen per kilo lik stigningstallet til den rette linjen fra origo til punktet: pris per kg $= \frac{y}{x}$. To punkter gir samme pris per kilo nøyaktig når de ligger på samme rette linje gjennom origo.

a) I koordinatsystemet ligger punkt D lengst til høyre av de seks punktene, altså har D den største x-verdien (vekten).

Sekk D er tyngst.

b) Punktene A og C ligger i nøyaktig samme høyde i koordinatsystemet, altså har de samme y-verdi (pris), selv om de har ulik x-verdi (vekt).

Sekk A og sekk C koster like mye.

c) Sekk B ligger lavest av alle seks punktene i diagrammet, altså har B klart lavest totalpris. Sekk C ligger høyere (dyrere totalt), men har også markert mer vekt enn B, til en pris i samme sjikt som A.

For å avgjøre hva som faktisk lønner seg, må prisen per kilo sammenlignes, ikke totalprisen. Prisen per kilo er stigningstallet til linjen fra origo til hvert punkt: en bratt linje betyr høy pris per kg, en slak linje betyr lav pris per kg.

Linjen fra origo til B er brattere enn linjen fra origo til C, selv om B ligger lavere i diagrammet og har lavere vekt. Det betyr at B koster mer per kilo enn C.

Det lønner seg ikke å kjøpe sekk B fremfor sekk C dersom man vil ha mest potet for pengene: C har lavere pris per kilo enn B, selv om B er billigst i sum.

d) To punkter gir samme pris per kilo når de ligger på samme rette linje gjennom origo. I koordinatsystemet ligger punkt A og punkt F på nøyaktig denne samme rette linjen gjennom origo.

I sekk A og sekk F koster potetene like mye per kilo.

Oppgave 5

a) Teller antall Non Stop i hver av de tre K-ene: K_1 har 10, K_2 har 14, og K_3 har 18.

$$K_2 - K_1 = 14 - 10 = 4, \quad K_3 - K_2 = 18 - 14 = 4$$

Mønsteret: for hver ny K blir både den loddrette streken og de to skrå armene i bokstaven én kule lengre i hver ende, slik at hver ny figur inneholder nøyaktig 4 flere Non Stop enn den forrige. Antall Non Stop i figur n danner altså en aritmetisk tallfølge med startverdi $K_1 = 10$ og differanse 4:

$$K_n = K_1 + (n - 1) \cdot 4 = 10 + 4(n - 1) = 4n + 6$$

$$K_4 = 4 \cdot 4 + 6 = 22, \quad K_5 = 4 \cdot 5 + 6 = 26$$

Det trengs 22 Non Stop i K_4 og 26 Non Stop i K_5 .

b) Siden hver figur inneholder 4 flere Non Stop enn forrige figur, oppdateres `nonstop_figur` ved å legge til 4 for hver runde, og `nonstop_totalt` oppdateres ved å legge den nye verdien av `nonstop_figur` til totalen:

```
# Startverdier
nonstop_figur = 10
nonstop_totalt = 10

# Overskrifter
print("Figurnummer", "Non Stop i figur", "Non Stop totalt")

for figurnummer in range(1, 21):

    # Skriver ut i tre kolonner ved å bruke tabulatorer sep = "\t\t\t"
    print(figurnummer, nonstop_figur, nonstop_totalt, sep="\t\t\t")

    nonstop_figur = nonstop_figur + 4
    nonstop_totalt = nonstop_totalt + nonstop_figur
```

Kjører programmet (kontrollert i Python): det skriver ut figurnummer 1–20 sammen med antall Non Stop i hver figur (10, 14, 18, ..., 86) og løpende totalsum (10, 24, 42, ..., 960).

c) Programmet fra b) gir totalsummen 960 etter figur 20. Kontrollerer med summeformelen for en aritmetisk rekke:

Formel (sum av aritmetisk rekke): $S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Med $n = 20$, $a_1 = K_1 = 10$ og $a_{20} = K_{20} = 4 \cdot 20 + 6 = 86$:

$$S_{20} = \frac{20}{2} \cdot (10 + 86) = 10 \cdot 96 = \underline{960}$$

Kari trenger til sammen 960 Non Stop for å lage de 20 første K-ene.

d) Kari har 2000 Non Stop og vil lage én K i hver størrelse, fra K_1 og oppover, så lenge hun har nok igjen. Bruker summeformelen for de N første figurene:

$$S_N = \frac{N}{2} \cdot (K_1 + K_N) = \frac{N}{2} \cdot (10 + 4N + 6) = \frac{N}{2} \cdot (4N + 16) = 2N^2 + 8N$$

Prøver seg fram med programmet fra b) utvidet til flere figurer (kontrollert i Python): kumulativ sum etter figur 29 er

$$S_{29} = 2 \cdot 29^2 + 8 \cdot 29 = 1682 + 232 = \underline{1914}$$

mens figur 30 alene krever $K_{30} = 4 \cdot 30 + 6 = 126$ Non Stop, og

$$S_{29} + K_{30} = 1\,914 + 126 = 2\,040 > 2\,000$$

altså har hun ikke nok til å fullføre K_{30} . Etter 29 K-er har hun brukt 1 914 Non Stop og har $2\,000 - 1\,914 = 86$ igjen, ikke nok til de 126 hun trenger til K_{30} .

Kari kan lage 29 K-er med sine 2000 Non Stop.

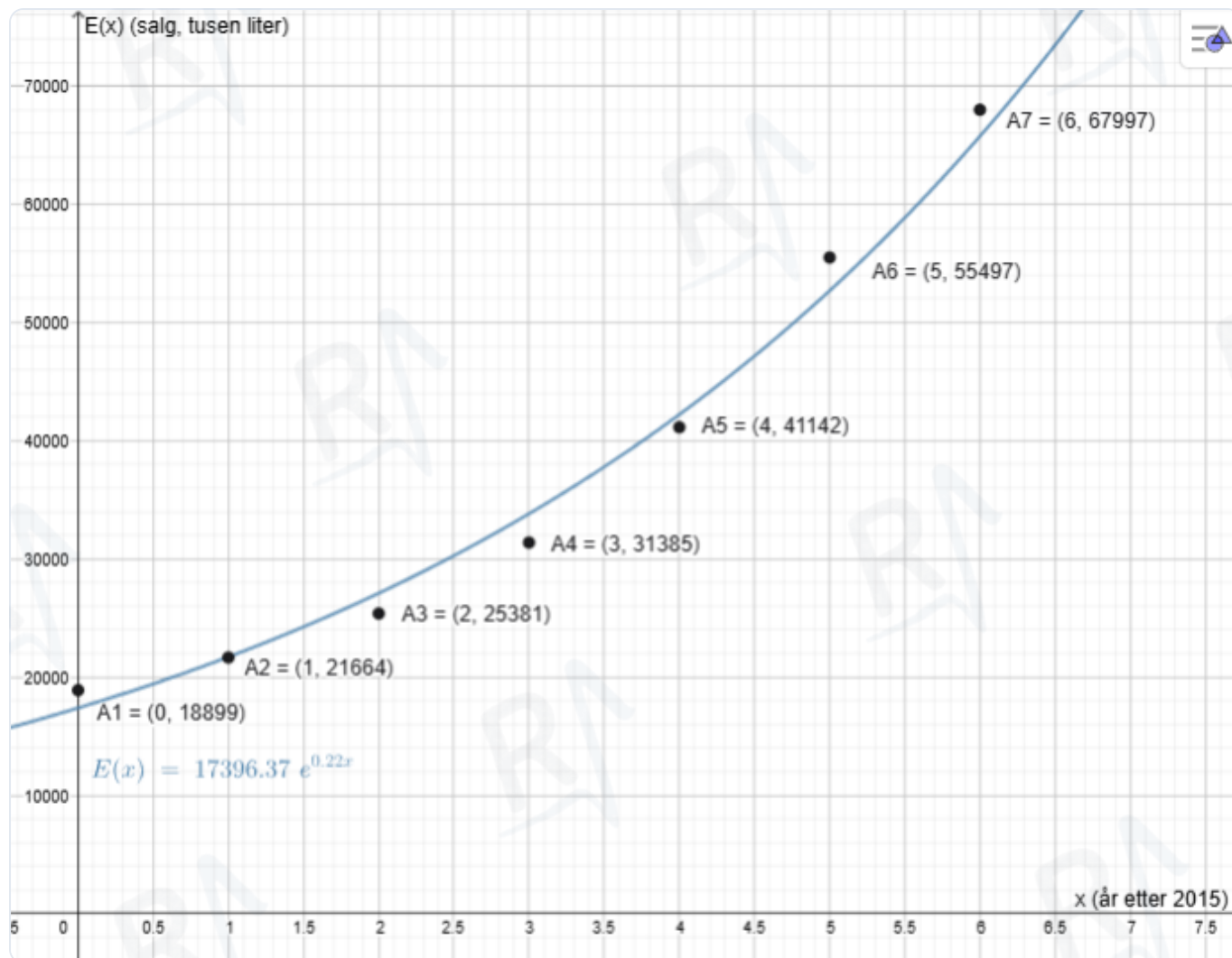
Oppgave 6

Formel (eksponentiell modell, gitt i oppgaveteksten): $E(x) = a \cdot b^x$, der x er antall år etter 2015.

a) Bruker GeoGebra: legger de sju tallparene (x, salg) inn i regnearket, med $x = 0$ for 2015, $x = 1$ for 2016, ..., $x = 6$ for 2021, markerer punktene, og bruker kommandoen for eksponentiell regresjon til å tilpasse $E(x) = a \cdot b^x$ til datapunktene.

Regresjonen gir

$$a \approx \underline{17\,396}, \quad b \approx \underline{1,248}$$



Sjekker modellen mot et par av tabellverdiene, for eksempel $x = 0$ og $x = 6$:

$$E(0) = 17\,396 \cdot 1,248^0 \approx 17\,396 \text{ tusen liter} \quad (\text{tabell: } 18\,899)$$

$$E(6) = 17\,396 \cdot 1,248^6 \approx 65\,759 \text{ tusen liter} \quad (\text{tabell: } 67\,997)$$

Modellen treffer tabellverdiene rimelig godt (avvik på et par prosent de fleste årene).

$a \approx 17\,396$ og $b \approx 1,248$, altså $E(x) = 17\,396 \cdot 1,248^x$.

b) Konstantleddet a er verdien av modellen ved $x = 0$, altså i 2015. $a \approx 17\,396$ tusen liter er modellens anslag for salget av energidrikker i 2015 (det faktiske tallet var 18 899, så modellen underdriver noe i startpunktet fordi regresjonen jevner ut hele datasettet).

Grunntallet b er vekstfaktoren per år. Siden $b \approx 1,248$, øker salget ifølge modellen med

$$(1,248 - 1) \cdot 100 \% \approx \underline{24,8 \%}$$

a er modellens anslag på salget i 2015 (ca. 17 396 tusen liter), og $b \approx 1,248$ betyr at salget av energidrikker ifølge modellen har vokst med ca. 25 % per år i perioden 2015–

2021.

c) I 2022 var salget 73 109 tusen liter, mot 67 997 tusen liter i 2021.

Formel (prosentvis endring): prosentvis endring = $\frac{\text{ny verdi} - \text{gammel verdi}}{\text{gammel verdi}} \cdot 100 \%$

Gammel verdi er salget i 2021 (67 997), ny verdi er salget i 2022 (73 109):

$$\frac{73\,109 - 67\,997}{67\,997} \cdot 100 \% \approx \underline{7,5 \%}$$

Salget av energidrikker økte med ca. 7,5 % fra 2021 til 2022.

Modellen fra a) forutsier en årlig vekst på ca. 24,8 % (fra b), mens den faktiske veksten fra 2021 til 2022 bare var ca. 7,5 %. Dette er langt lavere enn modellen tilsier. Den eksponentielle modellen ser ut til å ha passet godt for årene 2015–2021, men treffer dårlig for 2022. Det tyder på at salgsveksten flater ut, noe en ren eksponentiell modell med konstant vekstfaktor ikke fanger opp: eksponentiell vekst holder sjelden uendret over lang tid i et reelt marked, og en markedsmetning gir gjerne avtakende vekstrate etter hvert.

© 2026 Ruben S. Johanssen, RubenMatte. Kun til privat bruk og skal ikke deles, publiseres eller selges videre.