

Løsningsforslag — Eksamen 1P Høst 2025 (MAT1019)

DEL 1 – Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng)

Formel (strekning ved jevn fart): $s = v \cdot t$

Farten er 80 km/h, og tiden er 4 timer og 30 minutter, altså 4,5 timer:

$$s = v \cdot t = 80 \cdot 4,5 = \underline{360}$$

Strekningen mellom Mandal og Oslo er ca. 360 km.

Oppgave 2 (2 poeng)

Formel (pris uten merverdiavgift): $\text{pris uten mva} = \frac{\text{pris med mva}}{1 + \text{mva-sats}}$

Pris med mva er 200 kr, mva-satsen er 25 %, altså 0,25:

$$\text{pris uten mva} = \frac{200}{1 + 0,25} = \frac{200}{1,25} = \underline{160} \text{ kr}$$

Merverdiavgiften er differansen mellom pris med og pris uten mva:

$$\text{mva} = 200 - 160 = \underline{40}$$

Lukas betalte 40 kr i merverdiavgift.

Oppgave 3 (2 poeng)

Regel (standardform): et lite tall skrives som $a \cdot 10^{-n}$, der $1 \leq a < 10$.

Vekten til én støvpartikkel, 0,000 000 005 gram, skrevet på standardform:

$$0,000\,000\,005 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ gram}$$

Formel (antall enheter i en mengde): $\text{antall} = \frac{\text{total mengde}}{\text{mengde per enhet}}$

Total mengde er 20 gram støv, mengde per enhet er vekten til én støvpartikkel ($5 \cdot 10^{-9}$ gram):

$$\text{antall} = \frac{20}{5 \cdot 10^{-9}} = 4 \cdot 10^9$$

Det er ca. $4 \cdot 10^9$ (4 milliarder) støvpartikler i 20 gram støv.

Oppgave 4 (3 poeng)

Formel (volum av pyramide, gitt i oppgaveteksten): $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

a) Grunnflaten er et kvadrat med side s , altså $G = s^2$. Høyden er lik sidekanten i kvadratet, altså $h = s$. Setter dette inn i volumformelen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot s^2 \cdot s = \frac{s^3}{3}$$

Volumet er 9 dm^3 :

$$\frac{s^3}{3} = 9 \implies s^3 = 27 \implies s = \underline{3}$$

Siden $h = s$, er høyden også 3 dm.

Pyramiden er 3 dm høy.

b) To størrelser er proporsjonale dersom forholdet mellom dem er konstant, det vil si at $V = k \cdot h$ for en fast konstant k (grafene er da en rett linje gjennom origo).

For denne familien av pyramider er $h = s$, så volumet uttrykt ved høyden blir

$$V(h) = \frac{h^3}{3}$$

Forholdet mellom volum og høyde er

$$\frac{V(h)}{h} = \frac{h^3/3}{h} = \frac{h^2}{3}$$

Dette forholdet er ikke konstant: det vokser med h^2 når høyden øker. Volumet tredobler seg for eksempel ikke når høyden tredobles, men blir $3^3 = 27$ ganger så stort.

Ole har ikke rett: høyde og volum er ikke proporsjonale størrelser for disse pyramidene, fordi volumet vokser med høyden i tredje potens, ikke i takt med en konstant vekstfaktor per høydeenhet.

Oppgave 5 (2 poeng)

Formel (timelønn/stigningstall): $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{lønn}}{\text{antall timer}}$

Begge grafer er rette linjer gjennom origo. Ved $x = 10$ treffer begge linjer rutenettet rent: Nora's (grønne) graf går gjennom $(10, 2000)$, Nils' (blå) graf gjennom $(10, 1800)$.

a)

$$\text{Nora: } a = \frac{2000}{10} = \underline{200 \text{ kr/t}}$$

$$\text{Nils: } a = \frac{1800}{10} = \underline{180 \text{ kr/t}}$$

b) Differansen mellom de to timelønningene er $200 - 180 = 20$ kr/t. Med h som antall timer hver av dem arbeidet samme uke, og at Nora tjente 720 kroner mer enn Nils:

$$20 \cdot h = 720 \implies h = \frac{720}{20} = \underline{36 \text{ timer}}$$

Kontroll: Nora tjener $200 \cdot 36 = 7200$ kr, Nils tjener $180 \cdot 36 = 6480$ kr, differanse = 720 kr.
✓

Nora og Nils arbeidet 36 timer hver denne uken.

Oppgave 6 (5 poeng)

Formel (pris per enhet): pris per tur = $\frac{\text{totalpris}}{\text{antall turer}}$

30-dagersbilletten koster 1200 kr uansett antall turer:

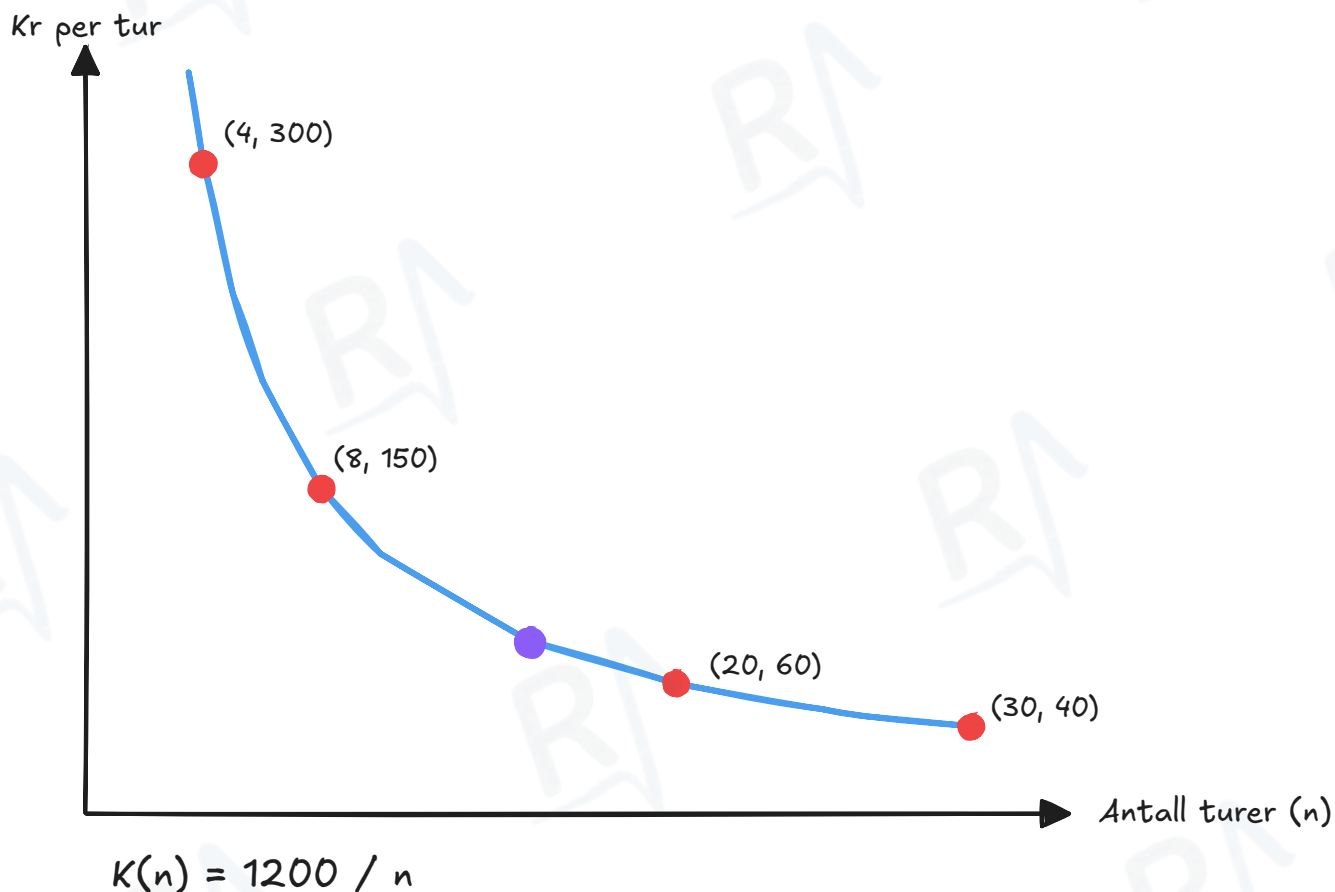
Antall turer	4	8	20	30
Pris per tur (kr)	<u>300</u>	<u>150</u>	<u>60</u>	<u>40</u>

Utrekning bak tabellen: $1200/4 = 300$, $1200/8 = 150$, $1200/20 = 60$, $1200/30 = 40$.

a) Prisen per tur ved 4, 8, 20 og 30 turer er henholdsvis 300 kr, 150 kr, 60 kr og 40 kr.

b) Prisen per tur som funksjon av antall turer n er $K(n) = \frac{1200}{n}$. Grafen er en avtakende hyperbelgren: den faller brått for lave n -verdier (dyrt per tur ved få turer) og flater gradvis ut mot null for store n -verdier (billig per tur ved mange turer), uten noen gang å nå null.

Oppgave 6c - $K(n) = 1200/n$ og enkeltbillett $y = 80$

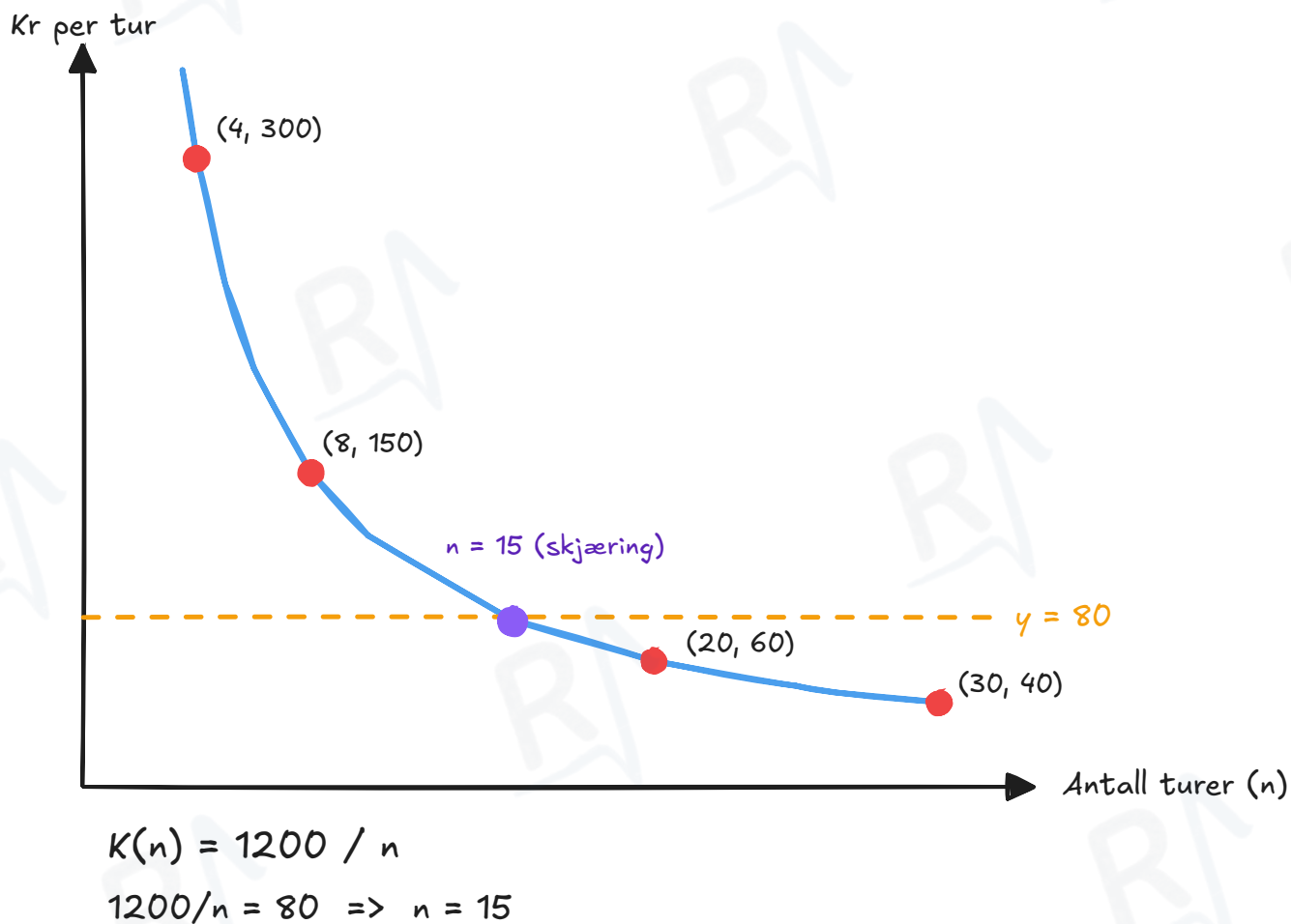


c) En enkeltbillett koster 80 kr, uavhengig av antall turer. Dette er en vannrett linje $y = 80$ i samme koordinatsystem som grafen til $K(n)$ fra b). Skjæringspunktet mellom $K(n) = 1200/n$ og linjen $y = 80$ finner vi ved

$$\frac{1200}{n} = 80 \implies n = \frac{1200}{80} = \underline{15}$$

Grafisk vil kurven $K(n)$ ligge over linjen $y = 80$ for $n < 15$ (enkeltbilletter lønner seg) og under linjen for $n > 15$ (30-dagersbilletten lønner seg, fordi prisen per tur da er lavere enn 80 kr).

Oppgave 6c - $K(n) = 1200/n$ og enkeltbillett $y = 80$



Det lønner seg å kjøpe 30-dagersbillett i stedet for enkeltbilletter dersom man skal ta bussen mer enn 15 ganger i løpet av perioden.

Oppgave 7 (3 poeng)

Programmet er:

```
tall = 1
differanse = 4
while tall <= 60:
    print(tall)
    tall = tall + differanse
    differanse = differanse + 3
```

Kjører programmet steg for steg: `tall` starter på 1 og skrives ut, deretter økes `tall` med `differanse` (som selv øker med 3 for hver runde):

Runde	Skrevet ut (<code>tall</code>)	differanse etter runden
1	1	7

Runde	Skrevet ut (tall)	differanse etter runden
2	5	10
3	12	13
4	22	16
5	35	19
6	51	22

Etter runde 6 blir $\text{tall} = 51 + 19 = 70$, som er større enn 60, og løkka stopper.

Tallene som blir skrevet ut, er 1, 5, 12, 22, 35, 51 .

Dette er nettopp femkanttallene (pentagonal numbers), gitt ved formelen $P(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$:

$$P(1) = 1, \quad P(2) = 5, \quad P(3) = 12, \quad P(4) = 22, \quad P(5) = 35, \quad P(6) = 51$$

Sammenhengen Siri har oppdaget, er at differansen mellom to påfølgende femkanttall selv øker med 3 for hvert nytt ledd (4, 7, 10, 13, 16, 19, ...), det vil si at femkanttallene vokser kvadratisk (som $P(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$), ikke lineært.

DEL 2 – Med hjelpemidler

Oppgave 1 (7 poeng)

Formel (potensmodell, gitt i oppgaveteksten): $F(x) = a \cdot x^b$

a) Bruker GeoGebra: legger de seks tallparene fra tabellen inn i regnearket, markerer punktene, og bruker kommandoen for potensregresjon (Regresjon med potens-modell) til å tilpasse $F(x) = a \cdot x^b$ til datapunktene.

Regresjonen gir

$$a \approx \underline{0,00966}, \quad b \approx \underline{3,00}$$

Sjekker modellen mot et par av tabellverdiene, for eksempel $x = 100$ og $x = 50$:

$$F(100) = 0,00966 \cdot 100^{3,00} \approx 9660 \text{ g} \quad (\text{tabell: } 9610 \text{ g})$$

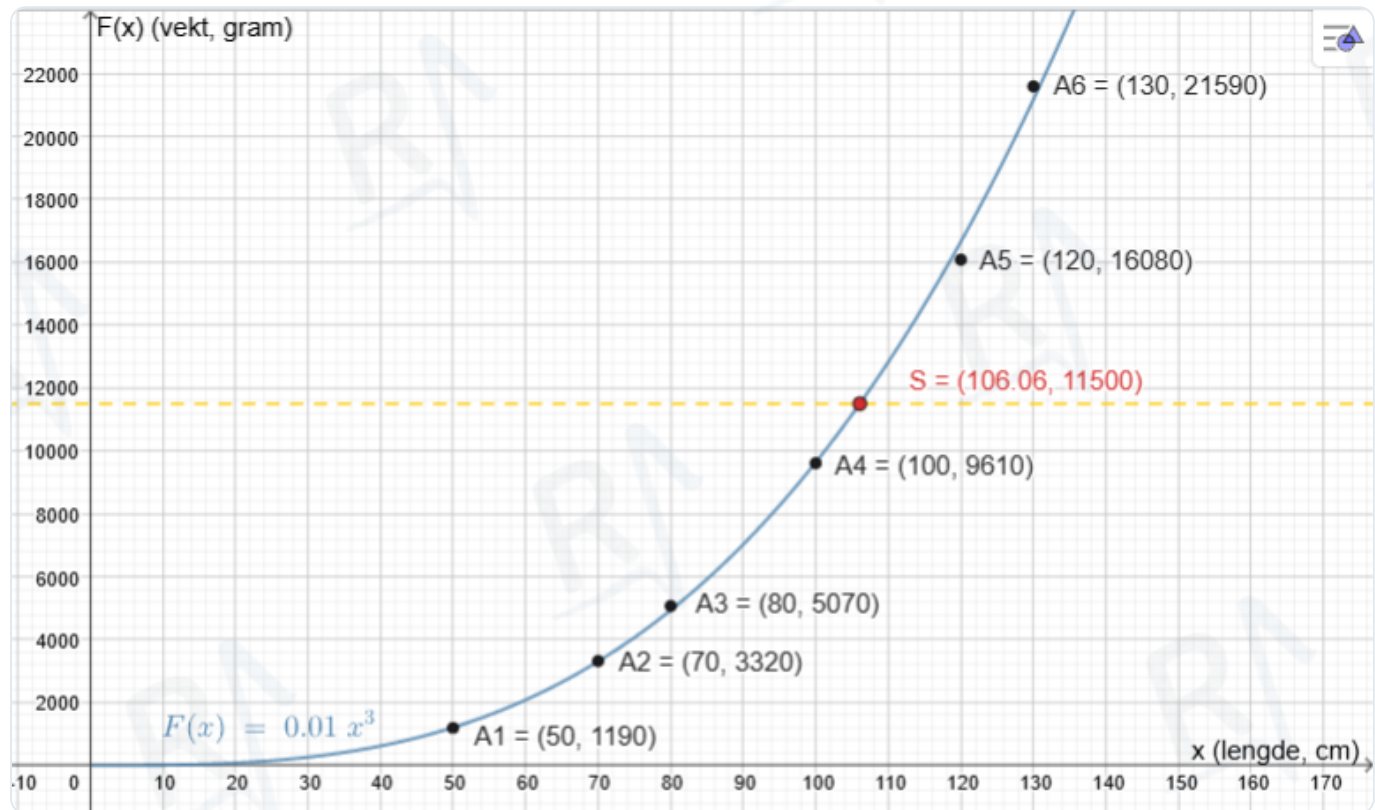
$$F(50) = 0,00966 \cdot 50^{3,00} \approx 1208 \text{ g} \quad (\text{tabell: } 1190 \text{ g})$$

Modellen treffer tabellverdiene godt (avvik under 2 %). Grafen til $F(x) = 0,00966 \cdot x^{3,00}$ er en stigende, konkav-opp kurve gjennom omtrent origo, som vokser raskere og raskere jo lengre

fisken er.

$a \approx 0,00966$ og $b \approx 3,00$, altså $F(x) = 0,00966 \cdot x^{3,00}$.

b) Vekten er 11,5 kg, altså 11 500 gram. Løser $F(x) = 11\,500$ med hjelp av GeoGebra (skjæringspunkt mellom grafen til F og den vannrette linjen $y = 11\,500$):



$$0,00966 \cdot x^{3,00} = 11\,500 \implies x \approx \underline{106}$$

Ifølge modellen er en fisk som veier 11,5 kg, ca. 106 cm lang.

c) Formel (stigningstall): $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Regner ut $F(75)$ og $F(95)$, som blir våre to punkter:

$$F(75) = 0,00966 \cdot 75^{3,00} \approx \underline{4075} \text{ g}$$

$$F(95) = 0,00966 \cdot 95^{3,00} \approx \underline{8282} \text{ g}$$

Stigningstallet til den rette linjen gjennom $(75, 4075)$ og $(95, 8282)$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8282 - 4075}{95 - 75} = \frac{4207}{20} \approx \underline{210}$$

Stigningstallet er ca. 210 g/cm. Dette betyr at i lengdeintervallet 75–95 cm øker vekten til fisken i gjennomsnitt med ca. 210 gram for hver ekstra centimeter i lengde.

d) Formel (vekstfaktor for potensfunksjon ved endring i x): dersom x multipliseres med en vekstfaktor k , multipliseres $F(x) = a \cdot x^b$ med k^b , fordi $a \cdot (kx)^b = a \cdot x^b \cdot k^b$.

En økning i lengde på 20 % svarer til vekstfaktoren $k = 1,20$ for lengden. Med $b \approx 3,00$:

$$k^b = 1,20^{3,00} \approx \underline{1,728}$$

En vekstfaktor på 1,728 svarer til en økning på

$$(1,728 - 1) \cdot 100 \% \approx \underline{72,8 \%}$$

Ifølge modellen vil vekten til fisken øke med ca. 73 % dersom lengden øker med 20 %.

(Siden $b \approx 3$, vokser vekten omtrent som lengden i tredje potens, og det stemmer med at fisken vokser tilnærmet "formlik" med seg selv, altså beholder samme kroppsfasong etter hvert som den blir lengre.)

Oppgave 2 (4 poeng)

De ni grafene er nummerert 1–9 i et 3×3 -rutenett i oppgaveteksten. Slik ser de ut: graf 1 er en rett, avtakende linje; graf 2 er en S-formet kurve (flat, så bratt, så flat igjen); graf 3 er en trappefunksjon med tre stigende, vannrette trinn; graf 4 er en avtakende kurve som starter i et endelig toppunkt og flater mot null; graf 5 er en rett, økende linje gjennom origo; graf 6 er en økende, avtakende-stigningstall-kurve (konkav ned); graf 7 og 9 er stykkevis lineære, økende kurver med et knekkpunkt; graf 8 er en sterkt avtakende hyperbelgren med loddrett asymptote nær y-aksen.

- **Situasjon A** (dyrebestand avtar med en fast prosent hvert år): eksponentiell nedgang fra et endelig starttall, flater mot null. Dette matcher **graf 4**.
- **Situasjon B** (fast pris fordeles likt på de som leier badstue): kostnad per person $K(x) = k/x$, omvendt proporsjonal sammenheng, altså en hyperbelgren med bratt fall nær y-aksen, samme type kurve som prisen per busstur i Del 1, oppgave 6. Dette matcher **graf 8**.
- **Situasjon C** (fuglebestand: eksponentiell vekst, deretter lineær, deretter stabilisering): en S-formet kurve (flat $\rightarrow$ bratt $\rightarrow$ flat). Dette matcher **graf 2**.
- **Situasjon D** (pakkepriser: 73 kr for 0–5 kg, 135 kr for 5–10 kg, 240 kr for 10–25 kg): en trappefunksjon med tre stigende, vannrette trinn. Dette matcher **graf 3**.

Situasjon A $\rightarrow$ graf 4, situasjon B $\rightarrow$ graf 8, situasjon C $\rightarrow$ graf 2, situasjon D $\rightarrow$ graf 3.

(Graf 1, 5, 6, 7 og 9 er distraktorer som ikke hører til noen av de fire situasjonene.)

Oppgave 3 (2 poeng)

Artikkelen (nrk.no, 14. april 2025) oppgir: "Nå skylder 229.963 nordmenn 57 milliarder kroner i betalingsanmerkninger... Antallet personer som skylder penger... utgjør 4,8 prosent av landets befolkning over 18 år."

a) **Formel (gjennomsnitt):** $\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{total sum}}{\text{antall personer}}$

$$\frac{57 \cdot 10^9 \text{ kr}}{229\,963} \approx \underline{247\,900 \text{ kr}}$$

Hver person med utestående betalingsanmerkninger skylder i gjennomsnitt ca. 248 000 kr .

b) De 229 963 personene utgjør 4,8 % av befolkningen over 18 år. Kaller befolkningen over 18 år for B :

$$0,048 \cdot B = 229\,963 \implies B = \frac{229\,963}{0,048} \approx \underline{4\,790\,000}$$

Det er ca. 4,8 millioner personer i Norge som er over 18 år.

Oppgave 4 (2 poeng)

Formel (enhetsomregning og valutaomregning): $\text{pris per kg i NOK} = \frac{\text{pris i USD}}{\text{antall kg}} \cdot \text{valutakurs}$

Synnøve betaler 4,18 USD for 3 pund epler. Regner om pund til kilogram, siden $1 \text{ lb} \approx 0,454 \text{ kg}$:

$$3 \text{ lb} = 3 \cdot 0,454 = \underline{1,362 \text{ kg}}$$

Prisen per kilo i amerikanske dollar:

$$\frac{4,18}{1,362} \approx \underline{3,07 \text{ USD/kg}}$$

Regner om til norske kroner med valutakursen $1 \text{ USD} = 10,16 \text{ NOK}$:

$$3,07 \cdot 10,16 \approx \underline{31,18}$$

Ett kilogram epler kostet ca. 31,18 kr .

Oppgave 5 (2 poeng)

Formel (vekstfaktor): vekstfaktor = $1 \pm$ prosentendring

Verdien har gått ned 23 %, altså er vekstfaktoren ved nedgangen

$$1 - 0,23 = \underline{0,77}$$

For at aksjen skal komme tilbake til opprinnelig verdi, må den nye (lavere) verdien multipliseres med en vekstfaktor som akkurat opphever nedgangen. Kaller den nødvendige vekstfaktoren for oppgang k :

$$0,77 \cdot k = 1 \implies k = \frac{1}{0,77} \approx \underline{1,2987}$$

En vekstfaktor på 1,2987 svarer til en økning på

$$(1,2987 - 1) \cdot 100 \% \approx \underline{29,9 \%}$$

Verdien må øke med ca. 29,9 % for at aksjen skal ha samme verdi som før nedgangen.

(Prosenten er større enn de opprinnelige 23 %, fordi oppgangen må regnes ut fra det lavere utgangspunktet etter nedgangen.)

Oppgave 6 (4 poeng)

Formel (avstand fra bueminutter): avstand = antall bueminutter · avstand per bueminutt

a) Én breddegrad er delt inn i 60 bueminutter, og avstanden mellom hvert bueminutt er 1852 meter (1 nautisk mil):

$$60 \cdot 1852 = \underline{111\,120} \text{ m} = \underline{111,12 \text{ km}}$$

Det viser at avstanden mellom hver breddegrad er ca. 111,12 km, som skulle vises.

b) **Formel (omkrets fra avstand per grad):** omkrets = 360 · avstand per breddegrad

Jorden har 360 breddegrader rundt (fra pol til pol og tilbake, målt langs en meridian), og avstanden per grad er 111,12 km fra a):

$$\text{omkrets} = 360 \cdot 111,12 \approx \underline{40\,003 \text{ km}}$$

En tilnærmet verdi for omkretsen av jorden er ca. 40 000 km.

c) Breddegraddifferansen mellom Oslo (59,9°) og Trondheim (63,4°):

$$63,4 - 59,9 = \underline{3,5} \text{ breddegrader}$$

Avstanden mellom byene, langs meridianen:

$$3,5 \cdot 111,12 \approx \underline{388,9} \text{ km}$$

Formel (andel av en helhet i prosent): $\text{andel} = \frac{\text{del}}{\text{helhet}} \cdot 100 \%$

Del er avstanden mellom Oslo og Trondheim (388,9 km), helhet er hele jordomkretsen (40 003 km fra b):

$$\frac{388,9}{40\,003} \cdot 100 \% \approx \underline{0,97 \%}$$

Avstanden mellom Oslo og Trondheim utgjør ca. 0,97 % av jordas omkrets.

Oppgave 7 (6 poeng)

Formel (omkrets av bedet, gitt i oppgaveteksten): $O = 2y + x + \frac{\pi \cdot x}{2}$

a) Bedet er formet som et rektangel med bredde x og lengde y , med en halvsirkel i den ene enden (halvsirkelens diameter er x , altså radius $x/2$). Gjerdet går rundt hele utsiden av figuren:

- de to lange sidene av rektangelet, til sammen $2y$,
- den korte, rette enden av rektangelet (motsatt halvsirkelen), x ,
- og buen til halvsirkelen, som er halvparten av omkretsen til en hel sirkel med radius $x/2$:
 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{x}{2} = \frac{\pi x}{2}$.

Legger disse tre bidragene sammen:

$$\underline{O = 2y + x + \frac{\pi x}{2}}$$

som er akkurat omkretsformelen oppgitt i oppgaveteksten, og dermed er den vist.

b) Gjerdet er 12 meter, og $x = 1$ meter. Setter inn i omkretsformelen fra a):

$$2y + 1 + \frac{\pi \cdot 1}{2} = 12$$

$$2y = 12 - 1 - \frac{\pi}{2} = 11 - \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{11 - \pi/2}{2} \approx \frac{11 - 1,571}{2} = \frac{9,429}{2} \approx \underline{4,7}$$

Når $x = 1$ meter og gjerdet er 12 meter langt, blir y ca. 4,7 meter, som skulle vises.

c) Formel (areal av sammensatt figur): $A = x \cdot y + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2$

Arealet er summen av rektangelets areal ($x \cdot y$) og halvsirkelens areal (halvparten av πr^2 med $r = x/2$). Med $x = 1$ og $y = 4,7$:

$$A = 1 \cdot 4,7 + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4,7 + \frac{\pi}{8} \approx 4,7 + 0,39 = \underline{5,1}$$

Arealet blir ca. 5,1 m² når $x = 1$ og $y = 4,7$.

d) Løser omkretsformelen $O = 12$ for y som funksjon av x (samme fremgangsmåte som i b), generelt):

$$y(x) = \frac{12 - x - \pi x/2}{2} = 6 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}$$

Setter dette inn i arealformelen fra c) og regner ut for flere verdier av x :

x (m)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$y(x)$ (m)	5,36	4,71	4,07	3,43	2,79	2,14	1,50	0,86
Areal (m ²)	2,78	5,11	6,99	8,43	9,42	9,97	10,06	9,72

Gyldig område for x er $0 < x < \frac{24}{2+\pi} \approx 4,67$ meter, siden y må være positiv.

Oversikten viser at arealet først øker med x , når en topp et sted mellom $x = 3$ og $x = 3,5$ meter, og deretter avtar igjen. Det finnes altså en x -verdi som gir størst mulig areal, se e).

e) Setter arealuttrykket fra c) og d) sammen til én funksjon av x alene:

$$A(x) = x \cdot y(x) + \frac{\pi}{8}x^2 = x \left(6 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi}{8}x^2$$

$$A(x) = 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8}$$

Dette er en andregradsfunksjon $A(x) = ax^2 + bx + c$ med $a = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \approx -0,893$, $b = 6$ og $c = 0$. Grafen er en parabel som vender grenene nedover, så den har et toppunkt som gir det største arealet.

Formel (toppunkt for andregradsfunksjon): $x_{\text{topp}} = -\frac{b}{2a}$

$$x_{\text{topp}} = -\frac{6}{2 \cdot (-0,893)} \approx \underline{3,36}$$

Setter x_{topp} inn i $A(x)$ for å finne det maksimale arealet, og i $y(x)$ fra d) for å finne tilhørende lengde:

$$A_{\text{topp}} = A(x_{\text{topp}}) \approx \underline{10,08}$$

$$y(x_{\text{topp}}) = 6 - \frac{3,36}{2} - \frac{\pi \cdot 3,36}{4} \approx \underline{1,68}$$

Med GeoGebra kan man også tegne grafen til $A(x)$ direkte og lese av toppunktet, og det bekrefter samme punkt.

Det størst mulige arealet er ca. $10,1 \text{ m}^2$, og det oppnås når $x \approx 3,4 \text{ m}$ (og tilsvarende $y \approx 1,7 \text{ m}$).

© 2026 Ruben S. Johanssen, RubenMatte. Kun til privat bruk og skal ikke deles, publiseres eller selges videre.