

Løsningsforslag — Eksamen 1P

Høst 2024 (MAT1019)

DEL 1 – Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Formel (prosentvis endring): prosentvis endring = $\frac{\text{ny verdi} - \text{gammel verdi}}{\text{gammel verdi}} \cdot 100 \%$

Vare A: gammel verdi er 120 kr, ny verdi er 180 kr:

$$\frac{180 - 120}{120} \cdot 100 \% = \frac{60}{120} \cdot 100 \% = \underline{50 \%}$$

Vare B: gammel verdi er 16 kr, ny verdi er 26 kr:

$$\frac{26 - 16}{16} \cdot 100 \% = \frac{10}{16} \cdot 100 \% = \underline{62,5 \%}$$

Prisen for vare B øker mest prosentvis (62,5 % mot 50 % for vare A), selv om den kroneøkningen (10 kr) er mindre enn for vare A (60 kr). Dette er fordi vare B har en mye lavere utgangspris, så den samme kroneøkningen utgjør en større andel av startverdien.

Oppgave 2 (3 poeng)

a) Ifølge oppgaveteksten er 1 billiard = $1000 \cdot 10^6 \cdot 10^6 = 10^3 \cdot 10^6 \cdot 10^6 = 10^{15}$.

Regel (standardform): et tall skrives som $a \cdot 10^n$, der $1 \leq a < 10$.

$$20 \text{ billiarder} = 20 \cdot 10^{15} = \underline{2 \cdot 10^{16}}$$

Det er omtrent $2 \cdot 10^{16}$ maur på jorden.

b) Oppgaven oppgir et intervall for både antall maur (200 000–300 000) og vekt per maur (7–9 mg), så svaret må bli et anslag. Jeg antar gjennomsnittsverdier midt i begge intervaller: 250 000 maur, hver på 8 mg. Regner videre ut fra dette.

Formel (total vekt): total vekt = antall · vekt per enhet

$$250\,000 \cdot 8 \text{ mg} = \underline{2\,000\,000 \text{ mg}}$$

Regner om til kilogram ($1 \text{ kg} = 1\,000\,000 \text{ mg}$):

$$\frac{2\,000\,000}{1\,000\,000} = \underline{2} \text{ kg}$$

Alle maurene i en normalt stor maurtue veier til sammen omtrent 2 kg . (Med ytterpunktene i intervallene gir regnestykket et spenn fra ca. $1,4 \text{ kg}$ til ca. $2,7 \text{ kg}$, så 2 kg er et rimelig midtpunktsanslag.)

Oppgave 3 (2 poeng)

To størrelser er **proporsjonale** når forholdet mellom dem er konstant for alle verdier (grafene er en rett linje gjennom origo), og **omvendt proporsjonale** når produktet av dem er konstant (grafene er en hyperbelgren).

A (badstueleie): Totalprisen er fast, 2200 kr , uansett hvor mange som deler på den. Med n personer blir prisen per person

$$\text{pris per person} = \frac{2200}{n}$$

Produktet $n \cdot (\text{pris per person}) = 2200$ er konstant: jo flere som betaler, desto mindre betaler hver enkelt. Antall personer og pris per person er derfor **omvendt proporsjonale**.

B (3 flasker, betal for 2): Prøver noen få verdier av antall flasker n , med p som prisen for én flaske. Kjøper man et helt antall grupper på 3, betaler man for $2/3$ av flaskene i hver gruppe:

n (flasker)	1	2	3	4	6
Betaler for	1	2	2	3	4
Totalpris	p	$2p$	$2p$	$3p$	$4p$
Pris/ n	p	p	$0,67p$	$0,75p$	$0,67p$

Forholdet mellom totalpris og antall flasker er ikke det samme for alle n (f.eks. p ved $n = 1$, men $0,67p$ ved $n = 3$). Grafen er en trappeliknende funksjon, ikke en rett linje gjennom origo. Antall flasker og totalpris er derfor **verken proporsjonale eller omvendt proporsjonale**.

C (vaffelrøre og mel): Skal man lage dobbelt så mange porsjoner, trengs dobbelt så mye mel; tredobler man antall porsjoner, trengs tredobbelt så mye mel. Forholdet

$$\frac{\text{mengde mel}}{\text{antall porsjoner}} = \text{konstant (oppskriftens mel per porsjon)}$$

er det samme uansett hvor mange porsjoner man lager. Antall porsjoner og mengde mel er derfor **proporsjonale**.

Oppgave 4 (3 poeng)

Begge programmene er kjørt (oversatt linje for linje til Python og faktisk utført, ikke bare resonnert seg fram til):

Program 1 ($e = e * 1.04$):

Måned m	Solgt denne måneden (e)	Akkumulert salg (t)
1	1000,0	1000,0
2	1040,0	2040,0
3	1081,6	3121,6
4	1124,9	4246,5
6	1216,7	6633,0
9	1368,6	10582,8
12	1539,5	15025,8

Program 2 ($e = e + 40$):

Måned m	Solgt denne måneden (e)	Akkumulert salg (t)
1	1000	1000
2	1040	2040
3	1080	3120
4	1120	4240
6	1200	6600
9	1320	10440
12	1440	14640

a) I begge programmene er e salget i inneværende måned, og linje 7 bestemmer hvordan salget endrer seg fra én måned til den neste.

- **Program 1**, $e = e * 1.04$: salget øker med en fast **prosent** hver måned: 4 % mer enn måneden før (eksponentiell vekst, samme vekstfaktor 1,04 hver gang).
- **Program 2**, $e = e + 40$: salget øker med et fast **antall enheter** hver måned: 40 flere solgte enheter enn måneden før (lineær vekst, samme tilvekst hver gang).

b) Variabelen t akkumulerer summen av salget måned for måned, så `print(t)` skriver ut **totalt antall solgte enheter i hele 2025** under den aktuelle vekstantakelsen:

Program 1: $t = \underline{15\,026}$ enheter (avrundet), Program 2: $t = \underline{14\,640}$ enheter

De to verdiene forteller Lisa hva totalsalget for året blir under to ulike antakelser om hvordan salget vokser måned for måned: ca. 15 026 enheter hvis salget vokser med 4 % per måned (Program 1), og 14 640 enheter hvis salget vokser med 40 enheter per måned (Program 2). Begge scenarioene gir langt mer enn målet på 1000 enheter i januar alene, og Lisa kan bruke tallene til å sammenligne hvor mye vekstmodellen har å si for årssalget totalt.

Oppgave 5 (3 poeng)

a) Sammenhengen mellom celsius og fahrenheit er lineær, $F = a \cdot C + b$.

Formel (stigningstall): $a = \frac{\Delta F}{\Delta C} = \frac{F_2 - F_1}{C_2 - C_1}$

Bruker punktene (0, 32) og (100, 212):

$$a = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \underline{1,8}$$

Konstantleddet b er verdien av F når $C = 0$, altså $b = \underline{32}$ direkte fra punktet (0, 32).

$$F = \underline{1,8 \cdot C + 32}$$

Kontroll med punktet (-40, -40): $1,8 \cdot (-40) + 32 = -72 + 32 = -40$. ✓

Formelen for å regne om fra celsius til fahrenheit er $F = 1,8 \cdot C + 32$.

b) Setter $F = 68$ inn i formelen fra a) og løser for C :

$$68 = 1,8 \cdot C + 32$$

$$1,8 \cdot C = 68 - 32 = 36$$

$$C = \frac{36}{1,8} = \underline{20}$$

68 °F tilsvarer $\underline{20\text{ °C}}$.

DEL 2 – Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Formel (gitt i oppgaveteksten): $P(x) = 3600 \cdot 0,85^x + 600$, der x er antall år etter 2010.

a) To måter å finne antall abonnenter i 2010 ($x = 0$):

Metode 1, algebraisk innsetting: Siden $0,85^0 = 1$ (et hvilket som helst tall opphøyd i 0 er 1), blir

$$P(0) = 3600 \cdot 0,85^0 + 600 = 3600 \cdot 1 + 600 = \underline{4200}$$

Metode 2, graf i GeoGebra: Tegner grafen til $P(x)$ i GeoGebra og leser av skjæringspunktet med y -aksen (der $x = 0$). Grafen skjærer y -aksen i punktet $(0, 4200)$, som stemmer med regnestykket over.

I 2010 abonnerte 4200 personer på papirutgaven.

b) **Formel (stigningstall):** $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{P(14) - P(4)}{14 - 4}$

Regner ut $P(4)$ og $P(14)$:

$$P(4) = 3600 \cdot 0,85^4 + 600 \approx \underline{2479}$$

$$P(14) = 3600 \cdot 0,85^{14} + 600 \approx \underline{970}$$

$$a = \frac{970 - 2479}{14 - 4} = \frac{-1509}{10} \approx \underline{-151}$$

Stigningstallet er ca. -151 abonnenter per år. Dette betyr at antall papirabonnenter i gjennomsnitt gikk ned med ca. 151 personer per år i tiårsperioden fra 2014 ($x=4$) til 2024 ($x=14$).

c) Antall digitale abonnenter i år $x = 9$ (2019) er 1000, med 5,5 % årlig vekst framover. Med t som antall år etter 2019:

Formel (eksponentiell vekst): $D(t) = 1000 \cdot 1,055^t$

Regner ut $D(t)$ og $P(x)$ (med $x = t + 9$) år for år og sammenligner:

År	t	$D(t)$ (digital)	x	$P(x)$ (papir)
2019	0	1000	9	1434
2020	1	1055	10	1309

År	t	$D(t)$ (digital)	x	$P(x)$ (papir)
2021	2	1113	11	1202
2022	3	1174	12	1112

I 2021 er digitalt (1113) fortsatt lavere enn papir (1202). I 2022 passerer digitalt papir ($1174 > 1112$) for første gang.

Det var i 2022 det for første gang var flere digitale enn papirabonnenter.

Oppgave 2 (2 poeng)

Formel (døgndose): døgndose = kroppsvekt · dose per kg

Pasienten veier 75 kg og skal ha 15 mg pulver per kg kroppsvekt per døgn:

$$\text{døgndose} = 75 \cdot 15 = \underline{1125} \text{ mg}$$

Døgndosen fordeles på tre like doser:

$$\text{mg per dose} = \frac{1125}{3} = \underline{375} \text{ mg}$$

Formel (volum ut fra konsentrasjon): volum = $\frac{\text{mengde pulver}}{\text{pulver per ml}}$

Legen bruker 6 mg pulver per ml vann:

$$\frac{375}{6} = \underline{62,5} \text{ ml}$$

Pasienten skal ha 62,5 ml medisin per dose.

Oppgave 3 (2 poeng)

Formel (vekstfaktor ved flere endringer etter hverandre): samlet vekstfaktor = $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$

Prisen settes opp 10 % ($k_1 = 1,10$), opp 20 % ($k_2 = 1,20$), og ned 30 % ($k_3 = 0,70$):

$$1,10 \cdot 1,20 \cdot 0,70 = \underline{0,924}$$

En samlet vekstfaktor på 0,924 er mindre enn 1, som svarer til en nedgang på

$$(1 - 0,924) \cdot 100 \% = \underline{7,6 \%}$$

Varen koster nå mindre enn før prisen ble satt opp første gang, ca. 7,6 % mindre, fordi de to økningene multipliseres med den siste nedgangen, og en nedgang på 30 % fra en høyere pris veier tyngre enn de to økningene til sammen.

Oppgave 4 (3 poeng)

Formel (gitt i oppgaveteksten): $t = \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \cdot s \cdot 60$

a) Strekningen er $s = 18$ km. Mandag kjørte Camilla i $v_1 = 58$ km/h, fredag i $v_2 = 65$ km/h:

$$t = \left(\frac{1}{58} - \frac{1}{65} \right) \cdot 18 \cdot 60 \approx \underline{2,0} \text{ min}$$

Camilla brukte ca. 2,0 minutter lengre tid mandag enn fredag.

b) La v være den laveste av de to fartene denne gangen, slik at den høyeste farten er $2v$ (dobbelt så høy). Setter dette inn i formelen fra oppgaveteksten, med tidsforskjellen lik 20 minutter:

$$\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{2v} \right) \cdot 18 \cdot 60 = 20$$

$$\frac{1}{2v} \cdot 1080 = 20$$

$$v = \frac{1080}{2 \cdot 20} = \underline{27} \text{ km/h}$$

Den andre farten er da $2v = \underline{54}$ km/h. Tiden brukt på hver av de to turene:

Formel (tid ved konstant fart): $\text{tid} = \frac{\text{strekning}}{\text{fart}}$

$$\text{ved } 27 \text{ km/h: } \frac{18}{27} \cdot 60 = \underline{40} \text{ min} \quad \text{ved } 54 \text{ km/h: } \frac{18}{54} \cdot 60 = \underline{20} \text{ min}$$

Kontroll: $40 - 20 = 20$ minutter, som stemmer med oppgitt tidsforskjell. ✓

De to andre dagene brukte Camilla 40 minutter på turen med den laveste farten (27 km/h) og 20 minutter på turen med den doble farten (54 km/h).

Oppgave 5 (4 poeng)

a) Antar at antall følgere øker med samme antall hver måned (lineær vekst). Fra 8 måneder siden til i dag har antallet økt fra 290 000 til 340 000, altså en økning på $340\,000 - 290\,000 = 50\,000$ følgere over 8 måneder:

Formel (fast tilvekst per måned): $\text{tilvekst per måned} = \frac{\text{total endring}}{\text{antall måneder}}$

$$\frac{50\,000}{8} = \underline{6250} \text{ følgere/måned}$$

Lar x være antall måneder etter målingen for 8 måneder siden (starttallet 290 000 følgere):

$$\underline{f(x) = 290\,000 + 6250 \cdot x}$$

b) Antar i stedet at antallet øker med samme prosent hver måned (eksponentiell vekst), $g(x) = 290\,000 \cdot k^x$ med samme x som over. Siden $g(8) = 340\,000$:

$$290\,000 \cdot k^8 = 340\,000 \implies k^8 = \frac{340\,000}{290\,000} \approx 1,1724$$

$$k = 1,1724^{1/8} \approx \underline{1,0201}$$

$$\underline{g(x) = 290\,000 \cdot 1,0201^x}$$

Vekstfaktoren 1,0201 svarer til en månedlig vekst på ca. 2,0 % dersom følgertallet i stedet vokser prosentvis.

Oppgave 6 (3 poeng)

Formel (årslønn): $\text{årslønn} = 12 \cdot \text{fast månedslønn} + n \cdot \text{tillegg per reiseoppdrag}$

$$A(n) = 12 \cdot 32\,000 + 20\,000n = 384\,000 + 20\,000n$$

$$B(n) = 12 \cdot 63\,000 + 16\,000n = 756\,000 + 16\,000n$$

$$C(n) = 12 \cdot 75\,000 + 8000n = 900\,000 + 8000n$$

a) Med $n = 3$ reiseoppdrag:

$$A(3) = 384\,000 + 20\,000 \cdot 3 = \underline{444\,000} \text{ kr}$$

$$B(3) = 756\,000 + 16\,000 \cdot 3 = \underline{804\,000} \text{ kr}$$

$$C(3) = 900\,000 + 8000 \cdot 3 = \underline{924\,000} \text{ kr}$$

Ved 3 reiseoppdrag i året gir Bedrift A 444 000 kr, Bedrift B 804 000 kr og Bedrift C 924 000 kr i årslønn. Bedrift C gir best lønn ved 3 reiseoppdrag.

b) Finner skjæringspunktene mellom de tre linjene parvis, siden det er der rangeringen mellom bedriftene bytter:

$$\begin{aligned} A(n) = B(n) : \quad 384\,000 + 20\,000n &= 756\,000 + 16\,000n \\ \implies 4000n &= 372\,000 \\ \implies n &= \underline{93} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(n) = C(n) : \quad 384\,000 + 20\,000n &= 900\,000 + 8000n \\ \implies 12\,000n &= 516\,000 \\ \implies n &= \underline{43} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(n) = C(n) : \quad 756\,000 + 16\,000n &= 900\,000 + 8000n \\ \implies 8000n &= 144\,000 \\ \implies n &= \underline{18} \end{aligned}$$

Siden C har lavest startlønn per oppdrag (8000 kr) men høyest fastlønn, mens A har lavest fastlønn men høyest tillegg per oppdrag (20 000 kr), bytter rangeringen fortløpende med økende n . Kontrollerer med noen verdier:

n	$A(n)$	$B(n)$	$C(n)$	Best
0	384 000	756 000	900 000	C
10	584 000	916 000	980 000	C
30	984 000	1 236 000	1 140 000	B
60	1 584 000	1 716 000	1 380 000	B
100	2 384 000	2 356 000	1 700 000	A

Bedrift C gir best lønn ved færre enn 18 reiseoppdrag i året, Bedrift B gir best lønn mellom 18 og 93 reiseoppdrag, og Bedrift A gir best lønn ved flere enn 93 reiseoppdrag i året. (Ved nøyaktig 18 oppdrag er B og C likeverdige, og ved nøyaktig 93 oppdrag er A og B likeverdige.)

Oppgave 7 (3 poeng)

a) Formel (antall som ikke stemte): ikke stemt = stemmeberettigede $\cdot$ (1 – fremmøteprosent)

Antall stemmeberettigede er 4 341 850, og fremmøteprosenten er 62,4 %, altså 0,624:

$$4\,341\,850 \cdot (1 - 0,624) = 4\,341\,850 \cdot 0,376 \approx \underline{1\,632\,536}$$

Omtrent 1 632 536 personer brukte ikke stemmeretten sin.

b) Tore sammenligner endringen i prosentpoeng direkte (Høyre har størst endring med +5,8 pp, mot Fremskrittspartiets +3,1 pp) og konkluderer at Høyre hadde størst framgang. Dette er **feil metode**, fordi prosentpoeng-endring ikke tar hensyn til hvor stort partiet var *før* endringen: samme antall prosentpoeng betyr en mye større relativ vekst for et lite parti enn for et stort parti.

For å finne den *prosentvise* framgangen må man først finne hvert partis oppslutning ved forrige kommunestyrevalg, og deretter regne endringen i pp som en andel av dette tallet:

Formel (oppslutning forrige valg): oppslutning forrige valg = oppslutning nå – endring i pp

Formel (prosentvis framgang): prosentvis framgang = $\frac{\text{endring i pp}}{\text{oppslutning forrige valg}} \cdot 100 \%$

Regner ut for alle partiene med positiv pp-endring:

Parti	Oppslutning nå	Endring (pp)	Oppslutning forrige valg	Prosentvis framgang
Høyre	25,9 %	+5,8	$25,9 - 5,8 = \underline{20,1} \%$	$5,8/20,1 \approx \underline{28,9} \%$
Fremskrittspartiet	11,3 %	+3,1	$11,3 - 3,1 = \underline{8,2} \%$	$3,1/8,2 \approx \underline{37,8} \%$
Venstre	5,0 %	+1,1	$5,0 - 1,1 = 3,9 \%$	$1,1/3,9 \approx 28,2 \%$
Andre	9,5 %	+1,5	$9,5 - 1,5 = 8,0 \%$	$1,5/8,0 \approx 18,8 \%$
SV	6,9 %	+0,8	$6,9 - 0,8 = 6,1 \%$	$0,8/6,1 \approx 13,1 \%$
Kristelig Folkeparti	4,0 %	0,0	4,0 %	0 %

Tore tar feil: han sammenligner prosentpoeng-endring direkte i stedet for å regne prosentvis vekst i forhold til hvert partis oppslutning ved forrige valg. Det er

Fremskrittspartiet som faktisk hadde størst prosentvis framgang, med ca. 37,8 % vekst fra 8,2 % til 11,3 %, mot Høyres ca. 28,9 % vekst fra 20,1 % til 25,9 %.

Oppgave 8 (7 poeng)

Metallplaten er $1200 \text{ mm} \times 800 \text{ mm}$. Klipper bort kvadrater med sidelengde x i alle fire hjørner og bretter opp kantene: kassen som dannes har lengde $1200 - 2x$, bredde $800 - 2x$

og høyde x (alle i mm).

Formel (volum av rett prisme/kasse): $V = \text{lengde} \cdot \text{bredde} \cdot \text{høyde}$

$$V(x) = x \cdot (1200 - 2x) \cdot (800 - 2x)$$

a) Med $x = 100$ mm:

$$V(100) = 100 \cdot (1200 - 200) \cdot (800 - 200) = 100 \cdot 1000 \cdot 600 = \underline{60\,000\,000} \text{ mm}^3$$

Formel (mm³ til liter): siden $1 \text{ dm} = 100 \text{ mm}$, er $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 100^3 \text{ mm}^3 = 1\,000\,000 \text{ mm}^3$:

$$\frac{60\,000\,000}{1\,000\,000} = \underline{60} \text{ L}$$

Med sidelengde 100 mm på de bortklippede kvadratene har kassen plass til nøyaktig 60 L sand, som skulle vises.

b) Regner ut volumet for flere verdier av x , i intervallet der kassen fortsatt gir mening ($0 < x < 400$ mm, se e)):

x (mm)	50	100	150	200	250	300	350
$V(x)$ (L)	38,5	60,0	67,5	64,0	52,5	36,0	17,5

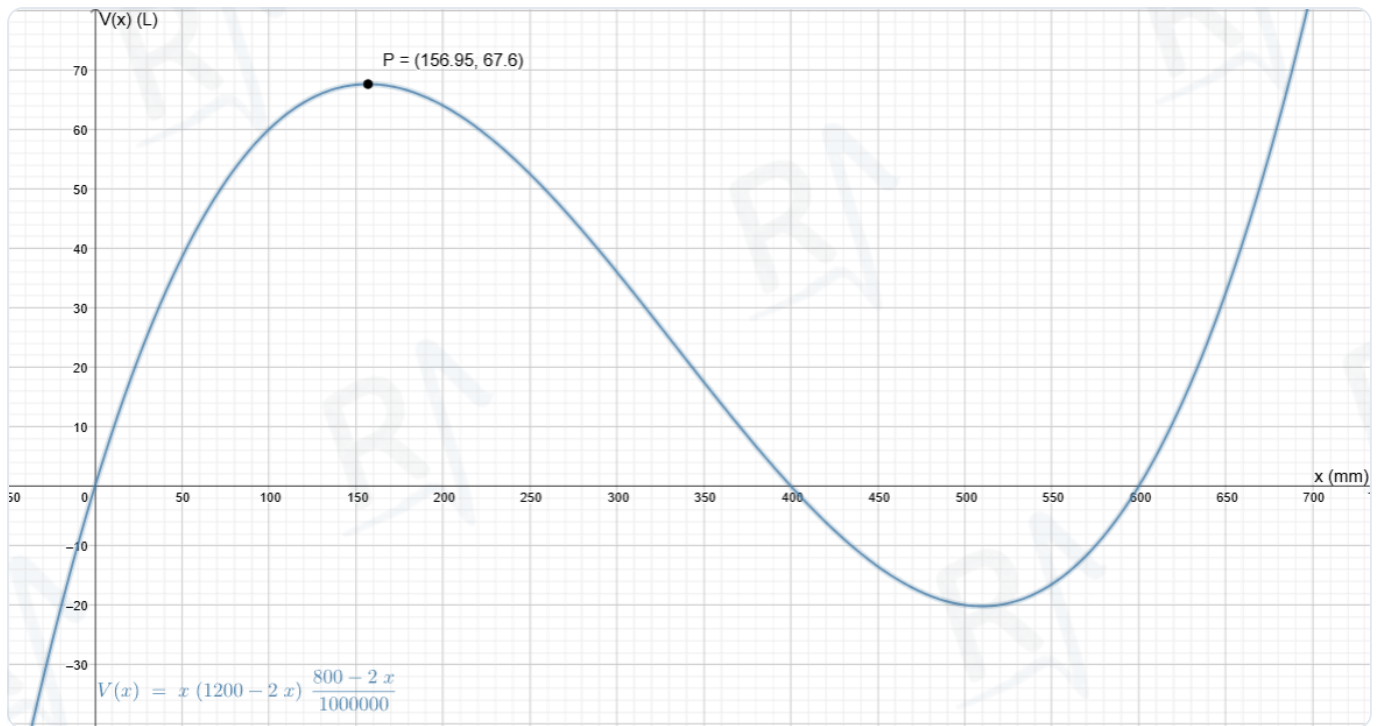
Volumet øker først med x , når en topp et sted mellom $x = 100$ og $x = 200$ mm, og avtar deretter mot 0 når x nærmer seg 400 mm.

c) Funksjonsuttrykket for volumet i liter, som funksjon av sidelengden x (i mm):

$$V(x) = \frac{x \cdot (1200 - 2x) \cdot (800 - 2x)}{1\,000\,000} \text{ L}$$

Grafen til $V(x)$ (tegnet i GeoGebra) er en kurve som starter i origo, stiger til et toppunkt et sted mellom $x = 100$ og $x = 200$ mm (jf. tabellen i b)), og avtar deretter mot null idet x nærmer seg 400 mm, i tråd med at kassen blir stadig grunnere og etter hvert flat når kvadratene som klippes bort blir store nok til å fjerne hele platens bredde.

d) Bruker GeoGebra: tegner grafen til $V(x)$ for $0 < x < 400$ og bruker kommandoen for ekstremalpunkt til å finne toppunktet på kurven.



GeoGebra gir toppunktet

$$x \approx \underline{157 \text{ mm}}, \quad V(x) \approx \underline{67,6 \text{ L}}$$

Formen på kassen som gir størst volum, oppnås ved å klippe bort kvadrater med sidelengde $\underline{157 \text{ mm}}$ (ca. 15,7 cm) i hvert hjørne, og gir da et volum på $\underline{67,6 \text{ L}}$, mer enn tabellverdiene i b) og godt over de 60 L som oppnås ved $x = 100 \text{ mm}$.

e) For at kassen skal gi mening, må alle tre dimensjonene være positive:

$$x > 0, \quad 1200 - 2x > 0 \implies x < 600, \quad 800 - 2x > 0 \implies x < 400$$

Den strengeste av disse betingelsene er $x < 400$ (fra platens korteste side, 800 mm), siden den slår inn før $x < 600$ -grensen fra langsiden.

Modellens gyldighetsområde er $\underline{0 < x < 400 \text{ mm}}$. Utenfor dette intervallet blir én av kassens sider null eller negativ, og en fysisk kasse kan da ikke lages av platen.

© 2026 Ruben S. Johanssen, RubenMatte. Kun til privat bruk og skal ikke deles, publiseres eller selges videre.