

Løsningsforslag — Eksamen 1P Høst 2023 (MAT1019)

DEL 1 – Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Formel (væskebehov): væskebehov = kroppsvekt · behov per kg

Tobias veier 70 kg, og nettsiden anbefaler 30 mL væske per kg kroppsvekt per døgn:

$$70 \cdot 30 = \underline{2100} \text{ mL} = \underline{2,1} \text{ L}$$

Ifølge nettsiden bør Tobias drikke ca. 2,1 liter vann daglig.

Oppgave 2

Teksten oppgir at 88 % bruker sosiale medier i dag, og at andelen har økt med 8 prosentpoeng de siste fem årene.

Vurdering av overskriften: "Ni av ti" betyr 90 %, mens teksten sier 88 %. Dette er ikke nøyaktig det samme, men 88 % ligger nærmere 90 % enn 80 %: avviket til 90 % er $90 - 88 = 2$ prosentpoeng, mens avviket til 80 % er $88 - 80 = 8$ prosentpoeng. Overskriften er derfor en avrundet, litt upresis forenkling av tallet i teksten. Den overdriver andelen med 2 prosentpoeng, men treffer bedre enn en avrunding til "åtte av ti" ville gjort.

Formel (prosentvis endring fra prosentpoeng-endring): prosentvis endring = $\frac{\text{prosentpoeng-endring}}{\text{opprinnelig andel}} \cdot 100 \%$

Andelen i dag er 88 %, og økningen er 8 prosentpoeng. Da må andelen ha vært $88 - 8 = \underline{80} \%$ for fem år siden. Den prosentvise økningen regnes ut fra denne opprinnelige andelen, ikke fra 88 %:

$$\frac{8}{80} \cdot 100 \% = \underline{10 \%}$$

Overskriften samsvarer ikke helt eksakt med teksten (88 % er ikke det samme som "ni av ti" = 90 %, selv om det er en nærliggende avrunding), og økningen på 8 prosentpoeng tilsvarer en prosentvis vekst på 10 %.

Oppgave 3

Formel (Ohms lov, gitt i oppgaveteksten): $I = \frac{U}{R}$

1) Ifølge formelen er strømmen I direkte proporsjonal med spenningen U når motstanden R holdes fast, det vil si at I øker når U øker. Påstanden er **sann**.

2) Ifølge formelen er strømmen I omvendt proporsjonal med motstanden R når spenningen U holdes fast, det vil si at I *minker* når R øker, ikke øker. Påstanden er **usann**.

Å øke spenningen øker strømmen (sant), mens å øke motstanden reduserer strømmen i stedet for å øke den (usant), fordi strømmen er omvendt proporsjonal med motstanden i Ohms lov.

Oppgave 4

Formel (lineær modell, gitt/foreslått): $H(x) = a \cdot x + b$, der a er stigningstallet og b er skjæringspunktet med den vertikale akse.

a) Tabellen i oppgaveteksten ("Så gammel er hunden din") gir menneskealder for tre hundekategorier, blant annet kolonnen "Store hunder", fra 2 år og oppover: (2, 24), (3, 30), (4, 36), (5, 42), osv. Sondre har mest sannsynlig lest av to punkter direkte fra denne kolonnen, for eksempel (2, 24) og (4, 36), og satt opp en rett linje gjennom dem.

Formel (stigningstall): $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Med $(x_1, y_1) = (2, 24)$ og $(x_2, y_2) = (4, 36)$ fra tabellen:

$$a = \frac{36 - 24}{4 - 2} = \frac{12}{2} = \underline{6}$$

Setter stigningstallet inn i punkt-retningsformelen sammen med punktet (2, 24) for å finne konstantleddet b :

$$H(x) = 6x + b, \quad 24 = 6 \cdot 2 + b \implies b = 24 - 12 = \underline{12}$$

Dette gir nettopp $H(x) = 6x + 12$. Modellen stemmer eksakt med tabellens "Store hunder"-kolonne for alle årstall fra og med 2 år (kontrollert mot flere rader i tabellen, blant annet $x = 14 \rightarrow H(14) = 6 \cdot 14 + 12 = 96$, som også er tabellverdien).

Modellen treffer derimot ikke tabellverdien for $x = 1$: tabellen sier 16 år ved 1 hundeår (samme tall for alle tre kategorier, i tråd med opplysningen i oppgaveteksten), mens modellen gir $H(1) = 6 \cdot 1 + 12 = 18$. Det aller første leveåret vokser hunder uvanlig raskt, og de tre

kategoriene har ennå ikke rukket å skille seg fra hverandre i tabellen, og en rett linje tilpasset de eldre radene treffer derfor ikke dette spesielle første året.

Modellen $H(x) = 6x + 12$ er funnet ved å lese av to punkter i "Store hunder"-kolonnen i tabellen (for eksempel $(2, 24)$ og $(4, 36)$) og regne ut stigningstall og konstantledd fra dem, og den er gyldig fra og med 2 hundeår til og med 14 hundeår (tabellens intervall for store hunder), men ikke for det spesielle første leveåret eller for alder utover det tabellen dekker.

b) To størrelser er proporsjonale dersom forholdet mellom dem, $\frac{H(x)}{x}$, er konstant for alle x (grafene går da gjennom origo).

Regner ut forholdet for noen verdier av x :

x	1	2	4	10
$H(x) = 6x + 12$	18	24	36	72
$H(x)/x$	18	12	9	7,2

Forholdet $H(x)/x$ er ikke konstant. Det avtar når x øker, og nærmer seg 6 uten noen gang å bli lik 6. Dette skyldes at grafen til $H(x) = 6x + 12$ skjærer den vertikale akse i $(0, 12)$ og ikke i origo, fordi konstantleddet $b = 12 \neq 0$.

Sondre tar ikke rett: hundealder og menneskealder er ikke proporsjonale i denne modellen, siden grafen ikke går gjennom origo og forholdet mellom dem endrer seg med x .

Oppgave 5

Formel (verdi etter prosentvis fall, vekstfaktor): ny verdi = gammel verdi $\cdot$ vekstfaktor, der vekstfaktoren ved et fall på $p\%$ er $1 - \frac{p}{100}$.

Bilen koster 490 000 kr ved kjøp. Verdifallet er 20 % det første året (vekstfaktor $1 - 0,20 = 0,80$) og 14 % det andre året (vekstfaktor $1 - 0,14 = 0,86$). Verdien etter 2 år finnes ved å multiplisere med begge vekstfaktorene etter hverandre:

$$490\,000 \cdot 0,80 \cdot 0,86 = 490\,000 \cdot 0,688 = \underline{337\,120}$$

Bilens verdi etter 2 år er 337 120 kr.

DEL 2 – Med hjelpemidler

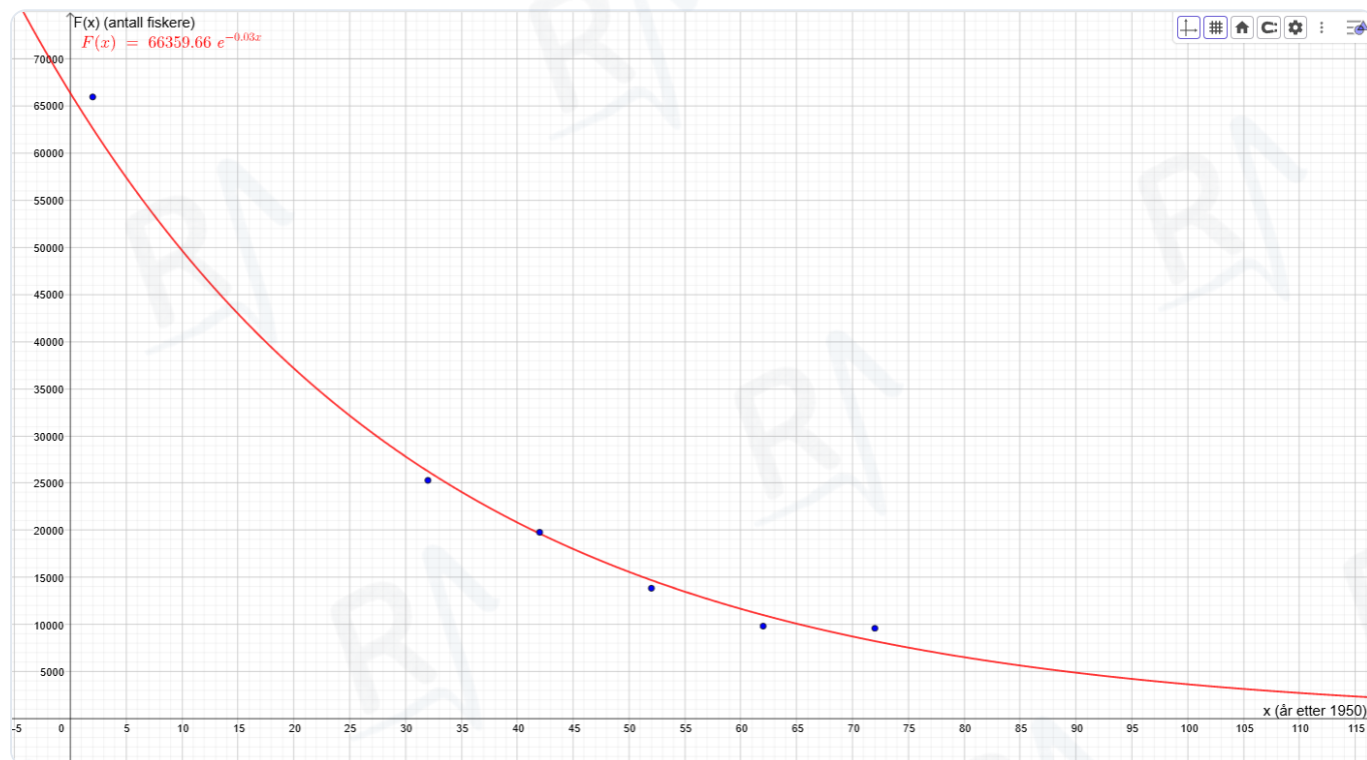
Oppgave 1

Formel (eksponentiell modell): $F(x) = a \cdot b^x$

a) Tallet på fiskere synker fra 65 956 i 1952 til 9 591 i 2022, og nedgangen flater tydelig ut mot slutten av perioden (fra 25 289 i 1982 til 9 591 i 2022). Dette er et mønster som typisk passer bedre med en eksponentiell modell enn med en rett linje, siden en rett linje ville gitt like store fall hvert tiår og til slutt negative, urealistiske tall.

Bruker GeoGebra (regresjonsanalyse på punktene $(x, F(x))$ med x = antall år etter 1950, seks datapunkter fra tabellen) og velger eksponentiell modell $F(x) = a \cdot b^x$:

$$a \approx \underline{66\,360}, \quad b \approx \underline{0,9714}$$



Sjekker modellen mot noen av tabellverdiene:

x	2	32	62	72
Tabell	65 956	25 289	9 825	9 591
Modell $F(x)$	62 623	26 251	11 004	8 235

Modellen treffer størrelsesordenen godt, men ikke perfekt. Spesielt de to siste tiårene (2012 og 2022) synker det reelle antallet fiskere saktere enn modellen tilsier, noe som tyder på at nedgangen har flatet mer ut i praksis enn en ren eksponentiell modell fanger opp.

$F(x) \approx 66\,360 \cdot 0,9714^x$, der x er antall år etter 1950.

b) For 2050 er $x = 100$:

$$F(100) = 66\,360 \cdot 0,9714^{100} \approx \underline{3\,660}$$

Dette er en ekstrapolering langt utenfor datagrunnlaget (tabellen dekker $x = 2$ til $x = 72$, mens $x = 100$ ligger 28 år forbi siste datapunkt). Siden nedgangen i de siste tiårene allerede synker saktere enn modellen forventer (se tabellen i a)), er det trolig at det faktiske tallet i 2050 blir høyere enn modellens anslag, så modellen bør tolkes som et nedre, usikkert grovt anslag, ikke en presis prognose.

Ifølge modellen vil det være ca. 3 660 personer med fiske som hovedyrke i Norge i 2050, men anslaget er svært usikkert fordi det ligger langt utenfor det tallgrunnlaget modellen er tilpasset til.

c) Formel (stigningstall): $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(70) - F(30)}{70 - 30}$

Regner ut $F(30)$ og $F(70)$ med modellen fra a):

$$F(30) = 66\,360 \cdot 0,9714^{30} \approx \underline{27\,820}, \quad F(70) = 66\,360 \cdot 0,9714^{70} \approx \underline{8\,730}$$

$$a = \frac{8\,730 - 27\,820}{70 - 30} = \frac{-19\,090}{40} \approx \underline{-477}$$

Stigningstallet til linjen gjennom $(30, F(30))$ og $(70, F(70))$ er ca. -477 . Dette betyr at i perioden fra 1980 til 2020 sank antallet fiskere med fiske som hovedyrke i gjennomsnitt med ca. 477 personer per år.

Oppgave 2

Formel (areal av rektangel): $A = L \cdot B$

La L_0 og B_0 være den opprinnelige lengden og bredden, slik at det opprinnelige arealet er $A_0 = L_0 \cdot B_0$. Lengden økes med 10 % (vekstfaktor 1,10), bredden reduseres med 20 % (vekstfaktor 0,80):

$$A_{\text{ny}} = (1,10 \cdot L_0) \cdot (0,80 \cdot B_0) = 1,10 \cdot 0,80 \cdot L_0 B_0 = \underline{0,88} \cdot A_0$$

En samlet vekstfaktor på 0,88 svarer til en endring på

$$(0,88 - 1) \cdot 100 \% = \underline{-12 \%}$$

Den prosentvise endringen av arealet blir en reduksjon på 12 %, selv om lengden økes, fordi reduksjonen i bredde veier tyngre enn økningen i lengde når vekstfaktorene multipliseres.

Oppgave 3

a) **Formel (antall per sekund):** $\text{antall per sekund} = \frac{\text{totalt antall per år}}{\text{antall sekunder per år}}$

Ett år har $365 \cdot 24 \cdot 3600 = 31\,536\,000$ sekunder, og vi spiser 500 millioner pølser årlig:

$$\frac{500\,000\,000}{31\,536\,000} \approx \underline{15,9}$$

Vi spiser i gjennomsnitt ca. 15,9 pølser hvert sekund i Norge.

b) **Formel (andel i prosent):** $\text{andel} = \frac{\text{del}}{\text{helhet}} \cdot 100 \%$

Del er antallet pølser spist 17. mai (13 millioner), helhet er det totale årsforbruket (500 millioner):

$$\frac{13\,000\,000}{500\,000\,000} \cdot 100 \% = \underline{2,6 \%}$$

Ca. 2,6 % av årets pølser spises på 17. mai.

c) Jordas omkrets ved ekvator, med radius 6378 km:

Formel (sirkelomkrets): $O = 2\pi r$

$$O = 2\pi \cdot 6378 \approx \underline{40\,074 \text{ km}}$$

Alle de 500 millioner pølsene på rad utgjør en strekning på 2,5 ganger denne omkretsen:

$$2,5 \cdot 40\,074 \approx \underline{100\,185 \text{ km}}$$

Formel (lengde per enhet): $\text{lengde per pølse} = \frac{\text{total lengde}}{\text{antall pølser}}$

$$\frac{100\,185 \text{ km}}{500\,000\,000} \approx 0,0002004 \text{ km} = \underline{20 \text{ cm}}$$

Ifølge NRKs regnestykke er en pølse omtrent 20 cm lang.

Oppgave 4

Antar at Mira veier ca. 10 kg, siden Mira sin vekt ikke er oppgitt i oppgaveteksten (en middels stor hund). Regner videre konsekvent ut fra denne antakelsen.

Formel (total mengde teobromin): teobromin = mengde sjokolade · teobromin per gram

Mira har spist 200 g melkesjokolade, og melkesjokolade inneholder ca. 1,2 mg teobromin per gram:

$$200 \cdot 1,2 = \underline{240} \text{ mg teobromin}$$

Formel (giftgrense i forhold til kroppsvekt): giftgrense = 20 mg/kg · kroppsvekt

Med antatt kroppsvekt 10 kg:

$$20 \cdot 10 = \underline{200} \text{ mg}$$

Den faktiske dosen (240 mg) er høyere enn giftgrensen ved denne antatte vekten (200 mg). Sjekker også hvor tung Mira må være for at dosen akkurat skal tilsvare giftgrensen:

$$20 \cdot \text{vekt} = 240 \implies \text{vekt} = \frac{240}{20} = \underline{12} \text{ kg}$$

Det betyr at enhver hund som veier mindre enn ca. 12 kg, vil ligge over giftgrensen etter å ha spist 200 g melkesjokolade, noe som dekker de fleste små og middels store hunder.

Med en antatt vekt på 10 kg overstiger den teobrominmengden Mira har fått i seg (240 mg) giftgrensen (200 mg), og siden grensevekten uansett bare er ca. 12 kg, bør Snorre ta kontakt med veterinær, med mindre han er sikker på at Mira veier vesentlig mer enn dette.

Oppgave 5 (vektes 3x)

Trekanten har hjørner $A(-6, 0)$, $B(6, 0)$ og $C(0, 6)$. Siden $\vec{CA} = (-6, -6)$ og $\vec{CB} = (6, -6)$ har vektorene skalarprodukt $(-6) \cdot 6 + (-6) \cdot (-6) = -36 + 36 = 0$, står de vinkelrett på hverandre, og trekanten er rettvinklet i C (i tillegg til likebeint, siden $|CA| = |CB|$).

Linjen BC går fra $B(6, 0)$ til $C(0, 6)$ og har likningen $x + y = 6$, altså $y = 6 - x$ for $0 \leq x \leq 6$.

Følger strategien fra samtalen mellom Martin og Maria: setter opp et funksjonsuttrykk for arealet med én variabel, og bruker deretter graf/toppunkt til å finne maksimum, i stedet for å prøve seg fram med enkelttall. Rektanglet er symmetrisk om y -aksen (fordi trekanten er likebeint og rektangelets sider er parallelle med aksene). La $P = (x, y)$ være hjørnet på BC med $x > 0$. Da er $y = 6 - x$, og rektanglets fire hjørner er $(\pm x, 0)$ og $(\pm x, y)$. Bredden er $2x$ og høyden er $y = 6 - x$.

Formel (areal av rektangel): $A = \text{bredde} \cdot \text{høyde}$

$$A(x) = 2x \cdot (6 - x) = 12x - 2x^2, \quad 0 < x < 6$$

Dette er en andregradsfunksjon med $a = -2$ og $b = 12$. Siden $a < 0$, vender parabelen grenene nedover, og toppunktet gir det maksimale arealet.

Formel (toppunkt for andregradsfunksjon): $x_{\text{topp}} = -\frac{b}{2a}$

$$x_{\text{topp}} = -\frac{12}{2 \cdot (-2)} = \underline{3}$$

Tilhørende y -verdi på linjen BC :

$$y = 6 - 3 = \underline{3}$$

Kontroll: $A(3) = 12 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 36 - 18 = 18$, som er størst av alle verdiene av $A(x)$ i intervallet. For eksempel er $A(2) = 16$ og $A(4) = 16$, begge mindre enn $A(3) = 18$. ✓

Arealet av rektanglet blir størst når $P = \underline{(3, 3)}$.

Oppgave 6

Formel (sum av geometrisk rekke): $S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$

Første linjestykke er $a_1 = 100$ cm, og hvert linjestykke er 90 % av det forrige, altså er forholdstallet $r = 0,9$.

a)

$$S_8 = 100 \cdot \frac{1 - 0,9^8}{1 - 0,9} \approx \underline{569,5 \text{ cm}}$$

Summen av de 8 første linjestykkene er ca. 569,5 cm.

b) (vektes 1,5x) Et program som regner ut summen for mange linjestykker, og teller hvor mange som trengs for at summen skal nå minst 900 cm (9 meter), kan se slik ut:

```
lengde = 100
sum = 0
antall = 0
while sum < 900:
    sum = sum + lengde
    lengde = lengde * 0.9
```

```

    antall = antall + 1
    print(antall)

```

Programmet legger til ett og ett linjestykke (som blir 90 % så langt som det forrige for hver runde) og teller opp `antall`, helt til summen når 900 cm. Kjøres formelen $S_n = 100 \cdot \frac{1-0,9^n}{0,1}$ for økende n , blir $S_{21} \approx 890,6$ cm (under grensen) og $S_{22} \approx 901,5$ cm (over grensen).

Det trengs 22 linjestykker for at summen skal bli minst 9 meter.

c) Regner ut summen for $n = 50$ og $n = 100$ linjestykker:

$$S_{50} = 100 \cdot \frac{1 - 0,9^{50}}{0,1} \approx \underline{994,8} \text{ cm}, \quad S_{100} = 100 \cdot \frac{1 - 0,9^{100}}{0,1} \approx \underline{1000,0} \text{ cm}$$

Formel (prosentvis endring): prosentvis endring = $\frac{S_{100} - S_{50}}{S_{50}} \cdot 100 \%$

$$\frac{1000,0 - 994,8}{994,8} \cdot 100 \% \approx \underline{0,5 \%}$$

Summen øker med bare ca. 0,5 % når antall linjestykker økes fra 50 til 100. Dette skyldes at rekken har en øvre grense den nærmer seg (uendelig mange, stadig kortere linjestykker gir en sum som går mot $100/(1 - 0,9) = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$), slik at både S_{50} og S_{100} allerede ligger svært nær denne grensen, og forskjellen mellom dem blir liten.

Oppgave 7

Formel (Ramanujans tilnærming til ellipseomkrets, gitt i oppgaveteksten): $O \approx \pi(a + b) \left[1 + \frac{3h}{10 + \sqrt{4 - 3h}} \right]$, der $h = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2$

a) Med $a = 3$ cm og $b = 2$ cm:

$$h = \left(\frac{3 - 2}{3 + 2} \right)^2 = \left(\frac{1}{5} \right)^2 = \underline{0,04}$$

$$O \approx \pi \cdot (3 + 2) \cdot \left[1 + \frac{3 \cdot 0,04}{10 + \sqrt{4 - 3 \cdot 0,04}} \right] = \pi \cdot 5 \cdot \left[1 + \frac{0,12}{10 + \sqrt{3,88}} \right] \approx \underline{15,865 \text{ cm}}$$

Maris digitale verktøy ga en omkrets på 15,865 cm. Ramanujans formel gir samme verdi (avvik under 0,001 cm), så de to metodene stemmer altså svært godt overens for denne ellipsen.

Ramanujans formel gir en omkrets på ca. 15,865 cm, som stemmer overens med Maris digitale målte verdi på 15,865 cm.

b) En sirkel er en ellipse der store og lille halvakse er like, altså $a = b$. Setter $a = b$ inn i uttrykket for h :

$$h = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 = \left(\frac{a-a}{a+a} \right)^2 = \underline{0}$$

Setter $h = 0$ inn i Ramanujans formel:

$$O \approx \pi(a+b) \left[1 + \frac{3 \cdot 0}{10 + \sqrt{4 - 3 \cdot 0}} \right] = \pi(a+b) \cdot 1 = \pi \cdot 2a = \underline{2\pi a}$$

Dette er nettopp den vanlige, kjente formelen for omkretsen til en sirkel med radius a ($O = 2\pi r$).

Når ellipsen er en sirkel ($a = b$), reduseres Ramanujans formel nøyaktig til $O = 2\pi a$, som er den kjente sirkelomkretsformelen. Formelen gjelder altså også i spesialtilfellet, og gir ikke bare en tilnærming der, men et eksakt resultat.

Oppgave 8 (vektes 1,5x)

Antakelse: bilen holder høy fart på rettstrekingene og bremser bare ned i svingene, og jo krappere svingen er, desto mer må den bremse. Da svarer hvert fartsdupp i grafen til én sving, dybden på duppet til hvor krapp svingen er, og avstanden mellom to dupp til lengden på rettstrekingen mellom to svinger.

Grafen viser tre dupp, og de er tydelig forskjellige: først et moderat dypt dupp, så et svært dypt og smalt dupp der farten er nesten null, og til slutt et grunt dupp. Bilen har full fart både ved start og ved mål. Vi leter derfor etter en bane med tre svinger av klart ulik skarphet, der ingen sving ligger helt i starten eller helt på slutten av runden.

Kort om hver bane:

- **A:** mange svinger, minst fem eller seks. Grafen ville hatt langt flere enn tre dupp.
- **B:** trekant med tre svært ulike hjørner, og startpunktet ligger midt på en av sidene.
- **C:** firkant, men startpunktet ligger i et hjørne. Bilen kjører gjennom tre hjørner underveis og må ta det fjerde hjørnet helt på slutten av runden.
- **D:** avlang bane med flere skarpe innhakk, altså for mange svinger.
- **E:** tilnærmet likesidet trekant. Tre like krappe svinger.
- **F:** trekant der de tre hjørnene er nokså like krappe, med startpunkt midt på en side.

A og D faller fordi de har for mange svinger. E faller fordi tre like hjørner ville gitt tre like dype dupp, mens grafen viser tre klart forskjellige. F faller av samme grunn, bare svakere: hjørnene

ligger for nær hverandre i skarphet til å forklare at det midterste duppet er så mye dypere enn de to andre.

C er den som er lettest å argumentere for, siden bilen bare passerer tre hjørner underveis og dermed får tre dupp. Men fordi startpunktet ligger i et hjørne, må bilen bremse ned helt på slutten av runden for å komme seg rundt det siste hjørnet. Grafen holder full fart helt til mål, så C stemmer ikke.

Da står bane B igjen, og den passer på alle punkter. Startpunktet ligger midt på venstresiden, så bilen har full fart når runden begynner. Først kommer det øvre venstre hjørnet, en moderat sving som gir det første duppet. Deretter følger den lange oversiden, som svarer til den lengste rettstrekingen i grafen, fram til den spisse høyre enden. Det er den klart krappeste svingen på banen, og den forklarer det dype, smale duppet der farten er nesten null. Til slutt kommer det nedre venstre hjørnet, som er den slakeste av de tre, og som gir det grunne duppet. Etter det er det bare et kort stykke tilbake til startpunktet, med full fart, slik grafen viser.

Bilen har kjørt på bane B.

© 2026 Ruben S. Johanssen, RubenMatte. Kun til privat bruk og skal ikke deles, publiseres eller selges videre.